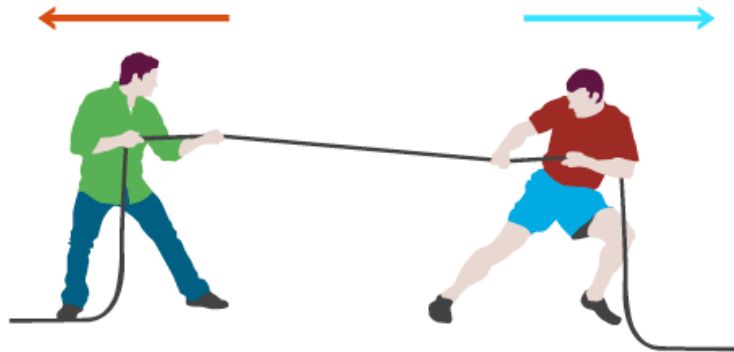
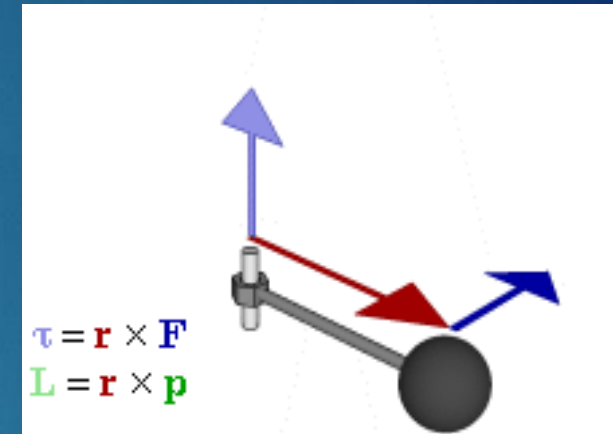


# APLHA Wiskunde Vektore



# Waar word vektore gebruik?

In fisika, kan wringkrag informeel gedefinieer word as 'n krag wat 'n draaiende beweging tot gevolg het. Hierdie krag word gedefinieer as die lineêre krag vermenigvuldig met 'n radius. Die SI-eenheid vir wringkrag is die newton-meter. Die simbool vir wringkrag is  $\tau$  (Wikipedia)



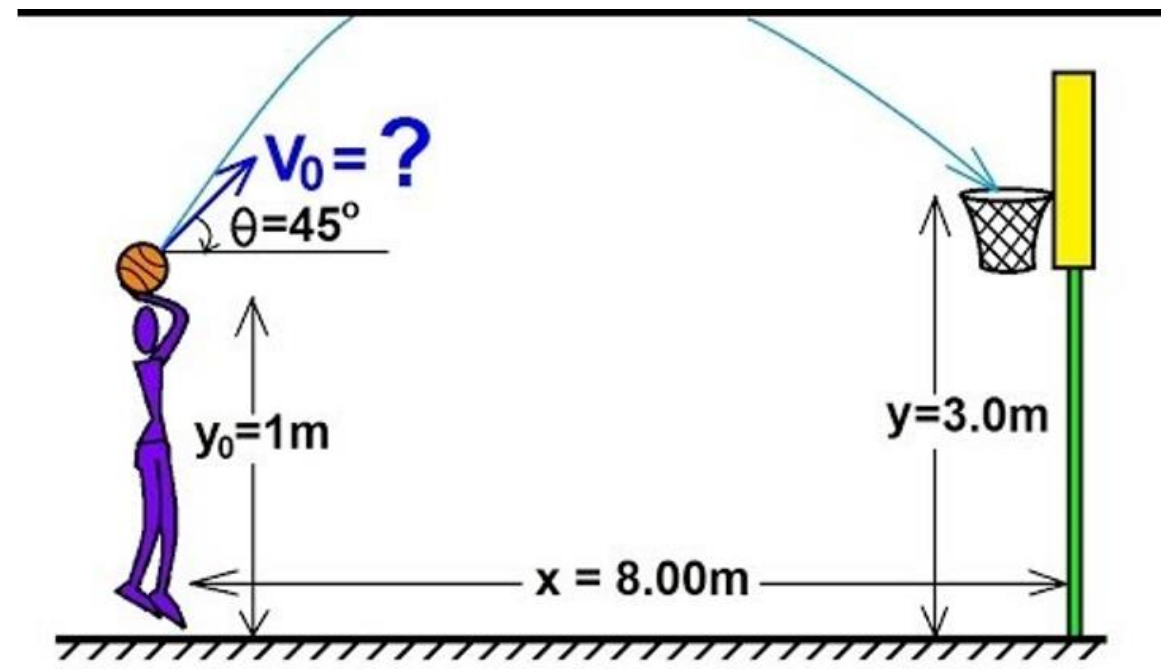
# Waar word vektore gebruik?

- ▶ Snelheid, versnelling
- ▶ Vektore in “gaming”  
<https://www.gamedeveloper.com/disciplines/vector-maths-for-game-dev-beginners>
- ▶ <https://www.void1gaming.com/post/fundamentals-of-vector-math-in-game-development>



# Waar word vektore gebruik?

- ▶ In sportsoorte soos netbal, krieket, basketbal word vektore onbewustelik deur die spelers gebruik. Die bal word teen 'n sekere hoek, en met 'n bepaalde snelheid gegooi (waar vektore 'n rol speel)



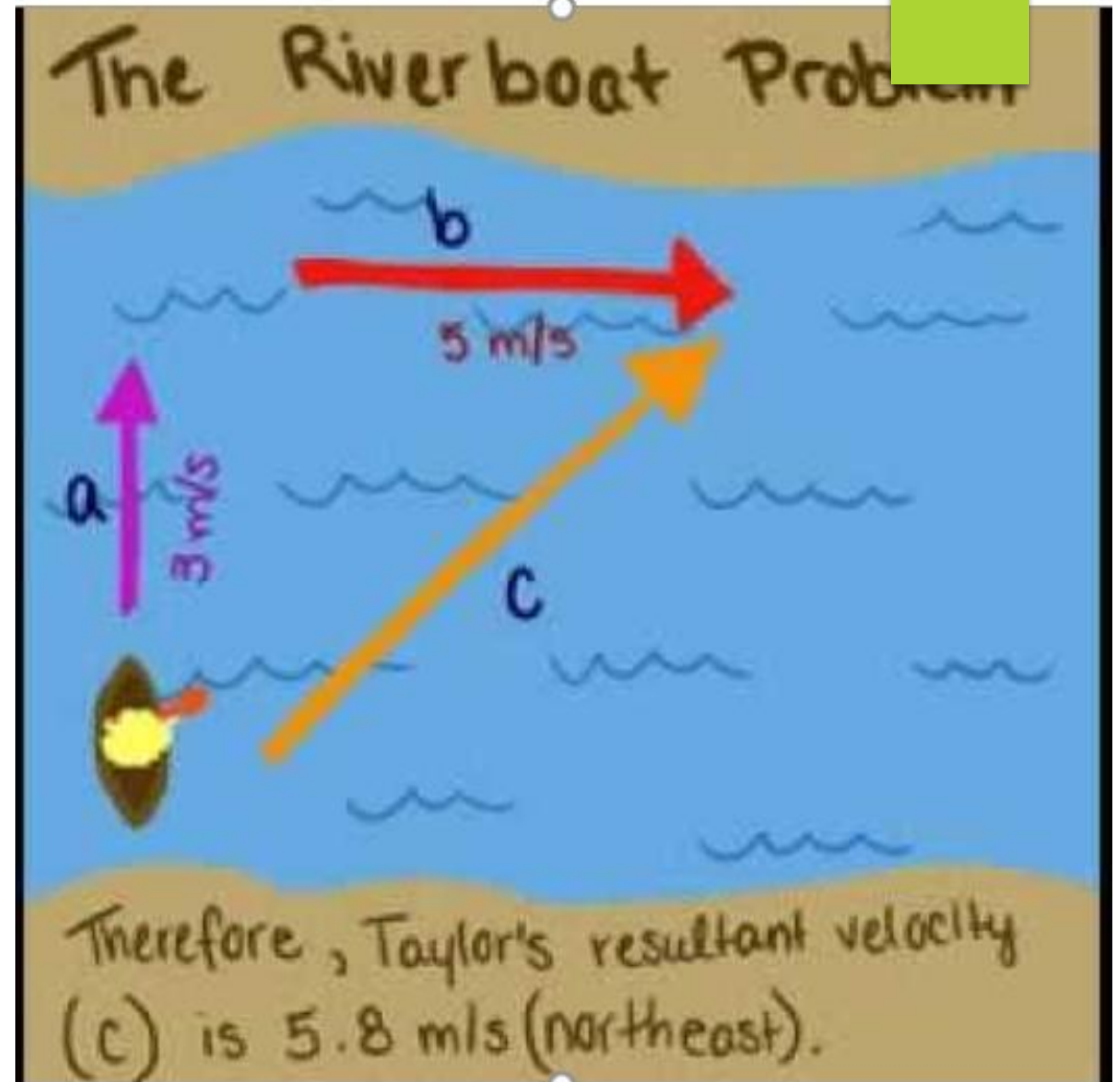
# Waar word vektore gebruik?

- ▶ Beweging in 'n "roller coaster" is 'n respons op die aantrekkingskrag van die aarde
- ▶ Hier speel vektore van kragte, versnelling en snelheid 'n groot rol



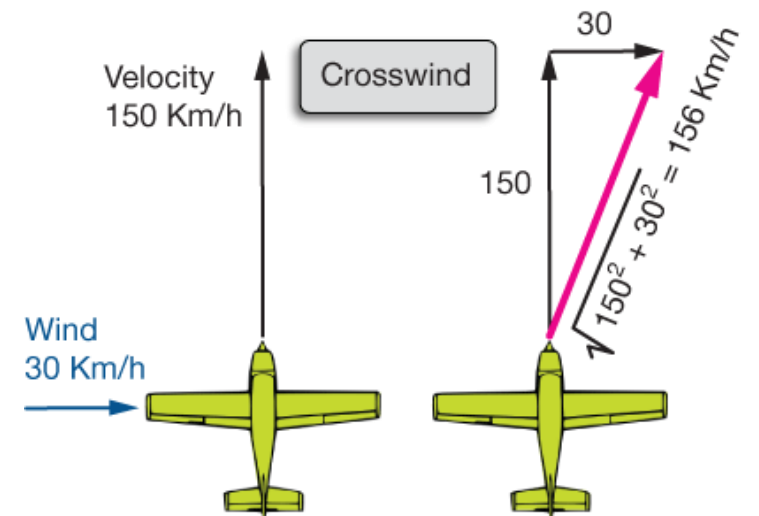
# Waar word vektore gebruik?

- ▶ Wanneer 'n boot 'n rivier oorsteek, is daar twee snelhede- die van die rivier en die van die boot. Die rigting van die boot verander na gelang van die snelheid van die rivier. Die roeier moet dus teen bepaalde hoek roei om reg oorkant die rivier te kom



# Waar word vektore gebruik?

- ▶ Dwarswinde kan ook 'n invloed uitoefen op 'n vliegtuig se rigting van beweging, asook snelheid. 'n Vlieënier kan dus die resultante snelheid en rigting bepaal met behulp van vektore



# Meetkundige beskrywing van vektore

- ▶ 'n Vektor is 'n hoeveelheid met grootte en rigting
- ▶ 'n Vektor in die plat vlak is 'n gerigte lynsegment. (Sien Fig 1).
- ▶ Ons dui die vektor aan met  $\vec{AB}$ . Punt A is die **beginpunt**, en B is die **eindpunt** van die vektor  $\vec{AB}$ .
- ▶ Die lengte van die lynsegment AB word die grootte (of lengte) van die vektor genoem, en aangedui deur  $|\vec{AB}|$

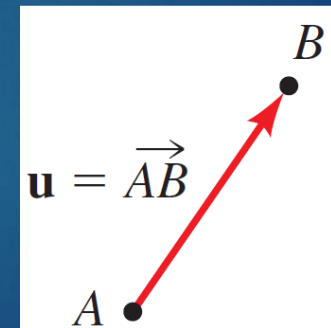
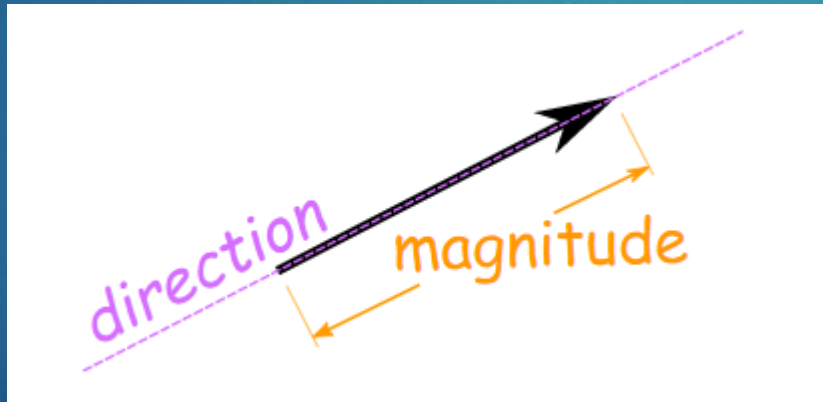
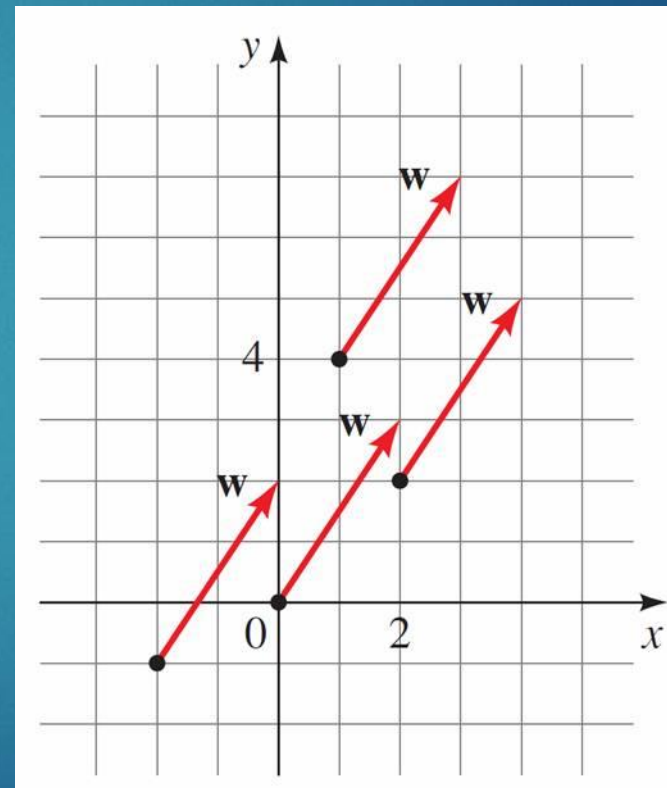


Figure 1

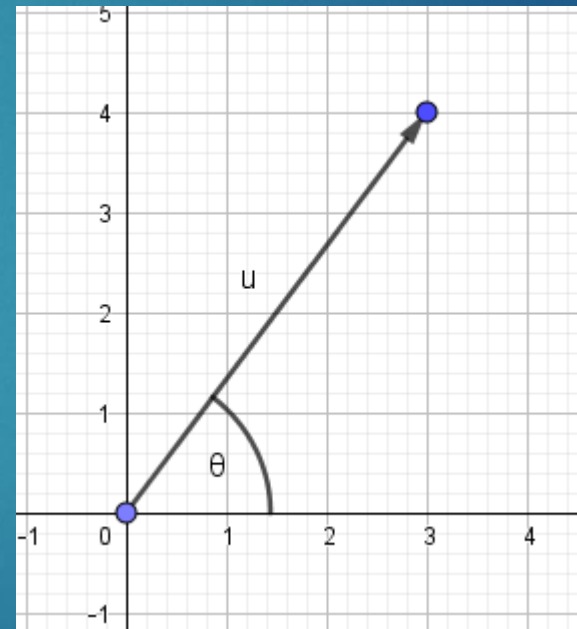
# Voorbeeld 1

- ▶ Skets voorstellings van die vektor  $\mathbf{w} = \langle 2, 3 \rangle$  met beginpunte by  $(0, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(-2, -1)$  en  $(1, 4)$ .



# 2D Vektore (graad 10)

- ▶ 'n Vektor kan geskryf word as 'n getallepaar, bv  $\mathbf{u} = (3; 4)$ . Die grootte van die vektor kan bepaal word, asook die rigting van die vektor (met trigonometrie)
- ▶ Grootte:  $|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
- ▶ Rigting:  $\tan\theta = \frac{4}{3}$ , dus  $\theta = 0,93$  radiale ( $53,13^\circ$ )
- ▶ Hierdie vektor kan dus geskryf word as 5, rigting  $53,13^\circ$
- ▶ (Ons meet vanaf die x-as in 'n antikloksgewyse rigting)

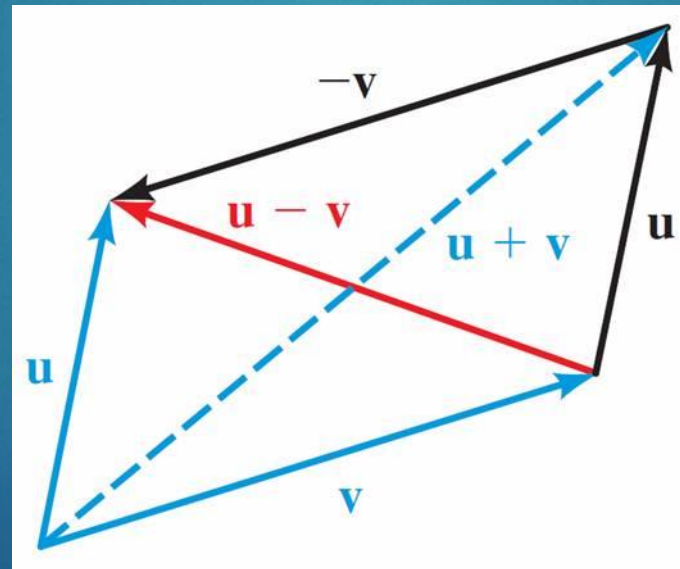


# Meetkundige beskrywing van vektore (som van vektore)

- ▶ [https://mathinsight.org/vectors\\_cartesian\\_coordinates\\_2d\\_3d](https://mathinsight.org/vectors_cartesian_coordinates_2d_3d)

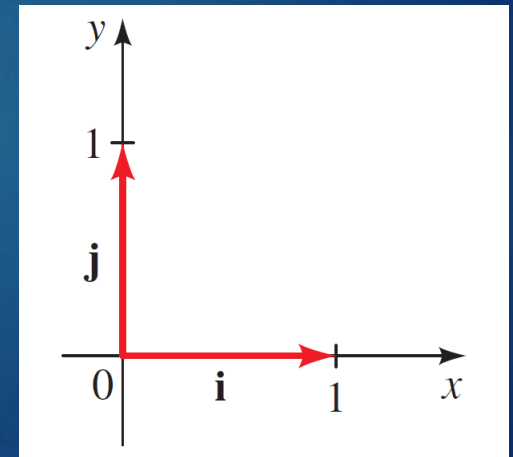
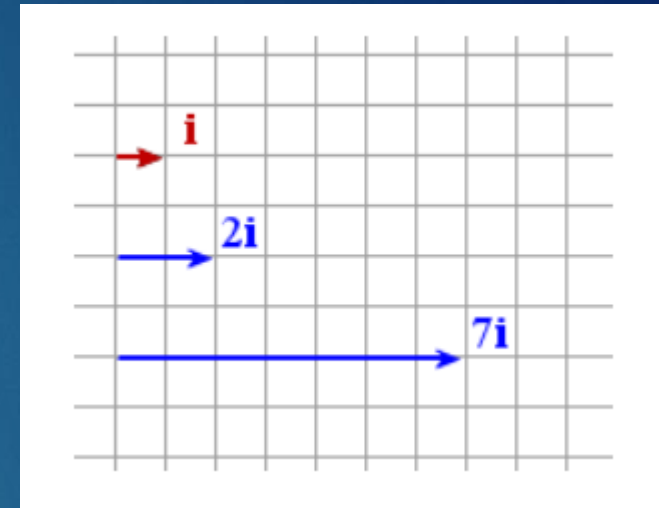
# Meetkundige beskrywing van vektore (verskil van vektore)

- Die verskil tussen twee vektore  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{v}$  word gedefinieer deur  $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$ . Die figuur hieronder toon dat die vektor  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  die ander diagonaal van die parallellogram gevorm deur  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{v}$  is..



# Eenheidsvektore in die koördinaatvlak

- ▶ 'n Vektor van lengte 1 word 'n **eenheidsvektor** genoem, bv.
- ▶ Die vektor  $\mathbf{w} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$  is 'n **eenheidsvektor**. Hoekom?
- ▶ Twee nuttige eenheidsvektore is  $\mathbf{i}$  en  $\mathbf{j}$ , gedefinieer deur  
 $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$  en  $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$
- ▶ <https://www.geogebra.org/m/eP9WYhjq>
- ▶ <https://www.geogebra.org/m/Qk2TvNXg> (3D)



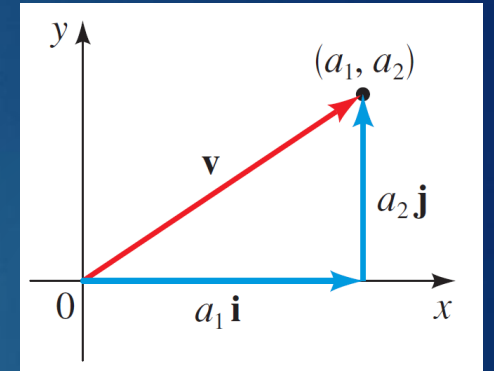
# Eenheidsvektore in die koördinaatvlak

- ▶ Hierdie vektore is spesiaal omdat enige vektor in terme daarvan uitgedruk kan word:

## VECTORS IN TERMS OF $\mathbf{i}$ AND $\mathbf{j}$

The vector  $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2 \rangle$  can be expressed in terms of  $\mathbf{i}$  and  $\mathbf{j}$  by

$$\mathbf{v} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$$



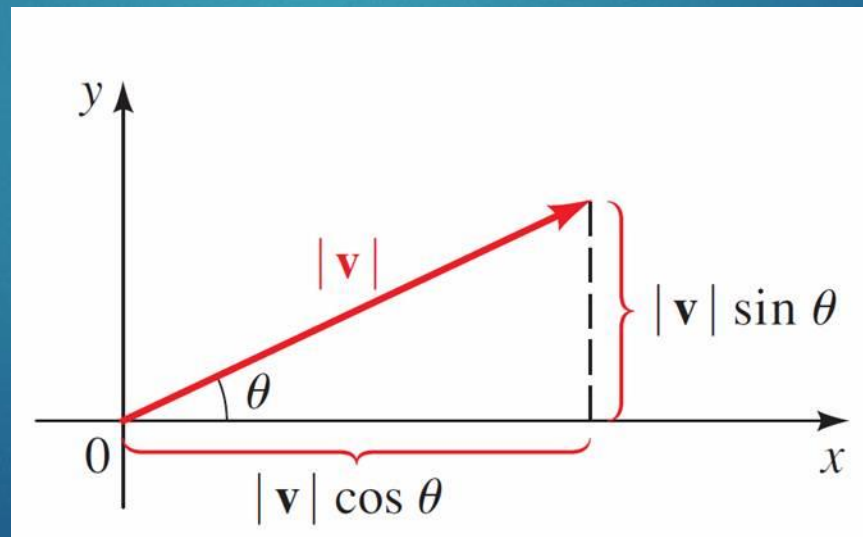
Voorbeeld: Skryf die vektor  $\mathbf{u} = \langle 5, -8 \rangle$  in terme van  $\mathbf{i}$  en  $\mathbf{j}$ .

Oplossing/ Solution:

$$\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + (-8)\mathbf{j} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$$

# Komponente van vektore

- ▶ Laat  $\mathbf{v}$  'n vektor in die platvlak wees met beginpunt die oorsprong. Die rigting van  $\mathbf{v}$  is  $\theta$ , die kleinste positiewe hoek in standaardposisie wat deur die positiewe x-as en  $\mathbf{v}$  gevorm word



# Komponente van vektore

- ▶ As ons die grootte en rigting van 'n vektor weet, dan kan ons die horisontale en vertikale komponente van 'n vektor bepaal

## HORIZONTAL AND VERTICAL COMPONENTS OF A VECTOR

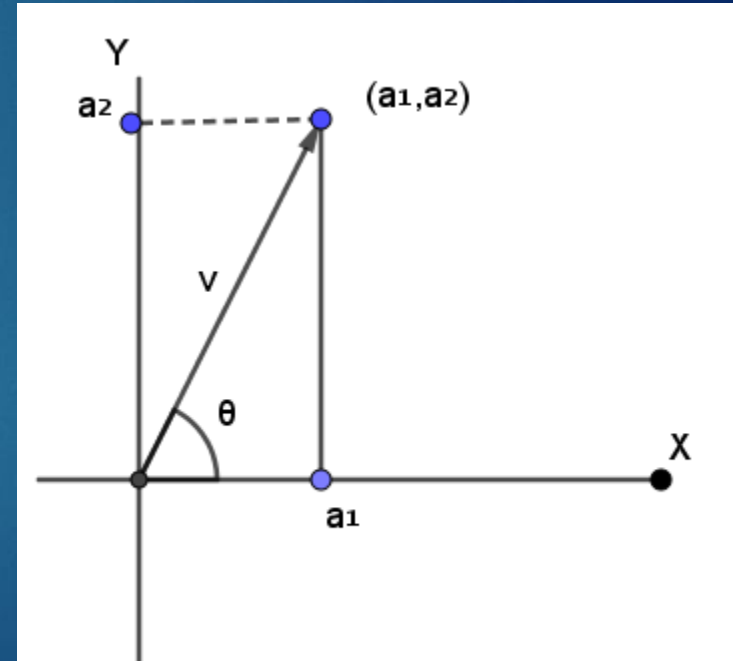
Let  $\mathbf{v}$  be a vector with magnitude  $|\mathbf{v}|$  and direction  $\theta$ .

Then  $\mathbf{v} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ , where

$$a_1 = |\mathbf{v}| \cos \theta \quad \text{and} \quad a_2 = |\mathbf{v}| \sin \theta$$

Thus we can express  $\mathbf{v}$  as

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cos \theta \mathbf{i} + |\mathbf{v}| \sin \theta \mathbf{j}$$



# Komponente

- ▶ <https://www.geogebra.org/m/CEBdRH69>
- ▶ <https://www.geogebra.org/m/QGYDPzJ2> (eerder die een)

## Voorbeeld: komponente en rigting van vektor

- ▶ 'n Vektor  $\mathbf{v}$  het lengte 8 eenhede en rigting  $\pi/3$ . Bepaal die horisontale en vertikale komponente, en skryf  $\mathbf{v}$  in terme van  $\mathbf{i}$  en  $\mathbf{j}$ .
- ▶
- ▶ Ons het  $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ , waar die komponente gegee word deur
- ▶  $a = 8\cos\frac{\pi}{3} = 4$  en  $b = 8\sin\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$
- ▶ Dus  $\mathbf{v} = \langle 4, 4\sqrt{3} \rangle = 4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$

# Puntproduk

- ▶ Die puntproduk is 'n aanduiding van watter hoeveelheid van een vektor in die rigting van die ander wys (in watter mate is hulle in dieselfde rigting). Bv: as jy 'n boks vir 10 meter in 'n rigting teen 'n bepaalde hoek trek, is daar 'n horisontale en vertikale komponent vir hierdie kragvektor. Die puntproduk in hierdie geval gee vir jou die hoeveelheid krag wat in die rigting van die verplasing gaan, of in die rigting wat die boks beweeg.
- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=BcxfxvYCL1g> (baie oulik- so 13 minute)
- ▶ <https://www.mathsisfun.com/algebra/vectors-dot-product.html>
- ▶ <https://betterexplained.com/articles/vector-calculus-understanding-the-dot-product/>

# Puntproduk

- ▶ Onthou puntproduk is 'n getal, en nie 'n vektor
- ▶ Indien vektor nie by oorsprong begin nie, kan die vektor tussen  $(x_1; y_1)$  en  $(x_2; y_2)$  bepaal word deur  $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$  en die grootte bepaal word deur:
  - ▶  $|\mathbf{u}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- ▶ Die puntproduk kan bepaal word met die formule
- ▶  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos\theta$  of ook  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \times b_x) + (a_y \times b_y)$
- ▶ Twee vektore is loodreg op mekaar as hul puntproduk gelyk is aan nul
- ▶ Die hoek tussen twee vektore kan bepaal word met:
  - ▶  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos\theta = (a_x \times b_x) + (a_y \times b_y)$
  - ▶  $\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$

# Voorbeeld

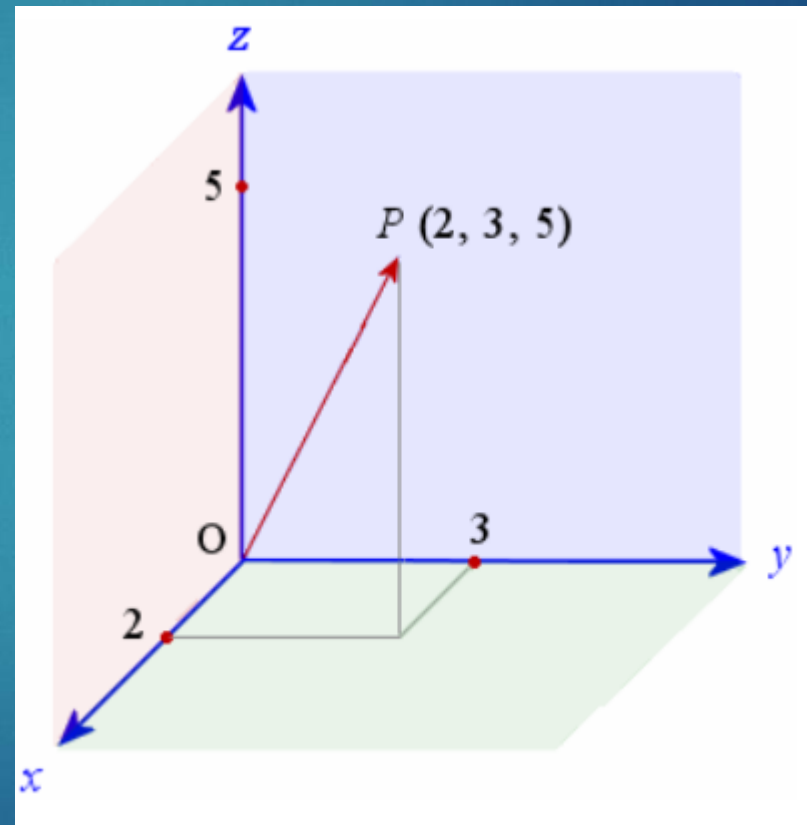
- ▶ Bepaal die hoek tussen die vektore  $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  en  $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
- ▶ **Oplossing:**
- ▶  $\mathbf{u}$  kan ook geskryf word as  $(3; 4)$ , en  $\mathbf{v}$  as  $(-2; -1)$
- ▶  $\theta = \text{bgcos} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}$
- ▶ Bepaal die puntproduk:  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(-2) + (4)(-1) = -10$
- ▶ Bepaal  $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2} = 5\sqrt{5}$
- ▶ Dus  $\theta = \text{bgcos} \frac{-10}{5\sqrt{5}} = 2,68 \text{ rad}$

# 3D vektore

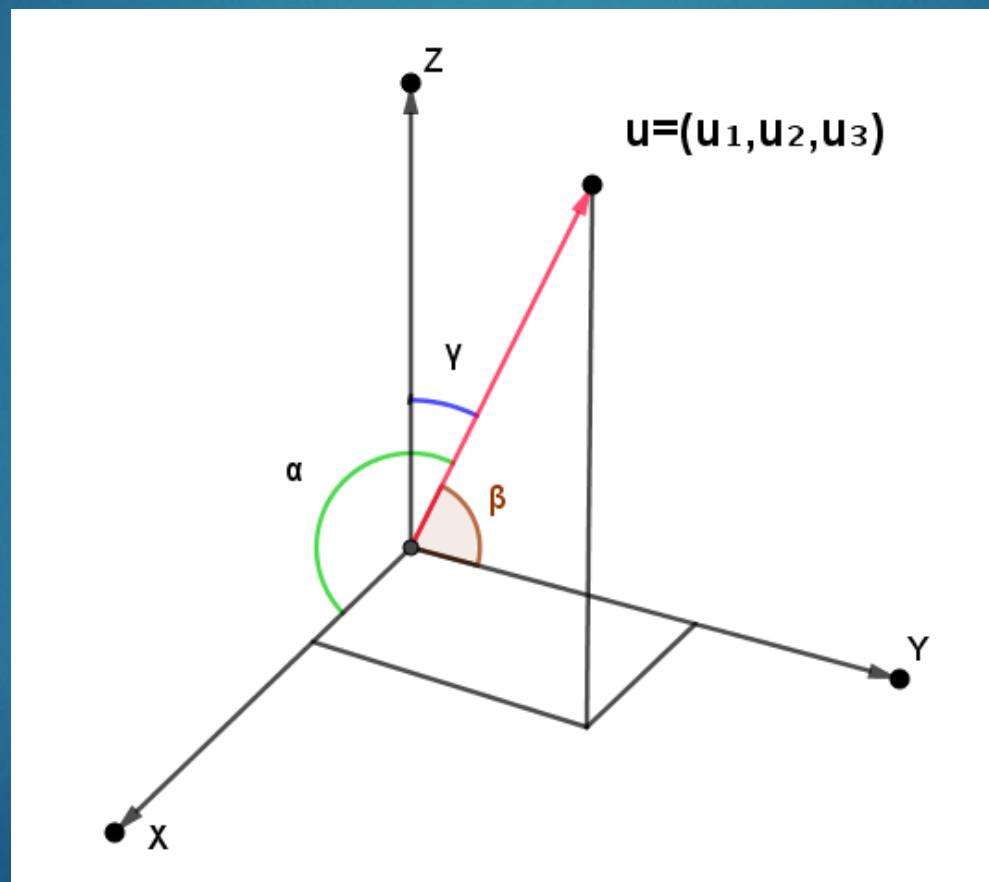
Besoek ook die website:

<https://www.intmath.com/vectors/7-vectors-in-3d-space.php>

- ▶ Om 'n punt voor te stel, word drie getalle gebruik
- ▶  $x$ ,  $y$  en  $z$  as
- ▶ 3D vektor kan op twee maniere voorgestel word:
- ▶  $\mathbf{OP} = \mathbf{v} = (2; 3; 5) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
- ▶ Indien vektor se beginpunt nie by die oorsprong is nie: Sien vb 7.1 (graad 11)

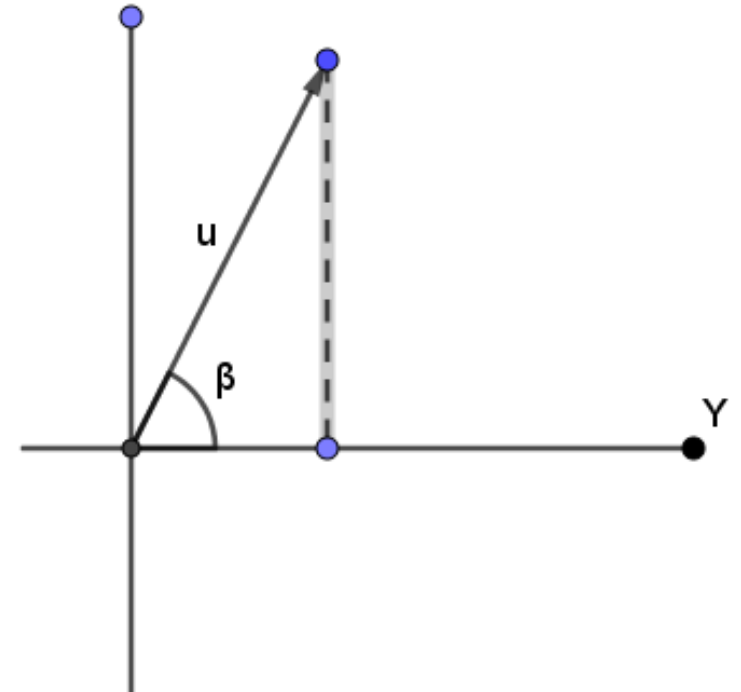


# Rigting van vektore



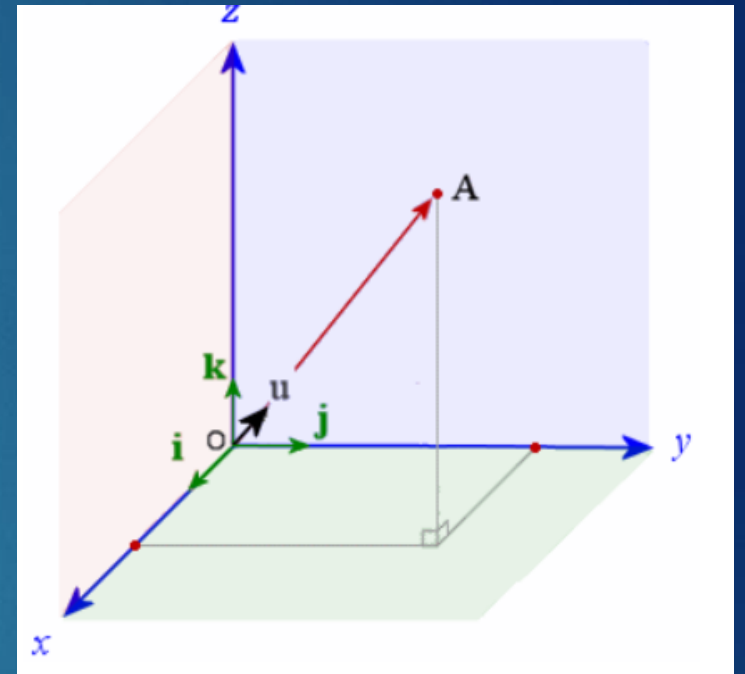
# Rigting van vektore

- ▶  $\frac{u_2}{|u|} = \cos\beta$
- ▶  $\therefore u_2 = |u|\cos\beta$
- ▶ En ook  $\beta = \text{bgcos}\left(\frac{u_2}{|u|}\right)$
- ▶ So ook  $\alpha = \text{bgcos}\left(\frac{u_1}{|u|}\right)$
- ▶  $\gamma = \text{bgcos}\left(\frac{u_3}{|u|}\right)$



# Rigting van vektore (vervolg)

- ▶ Beskou die vektor  $\mathbf{OA}$
- ▶ Veronderstel ons het 'n eenheidsvektor  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$  in dieselfde rigting as  $\mathbf{OA}$  (swart pyltjie)
- ▶  $\mathbf{u}$  is 'n vektor waarvan die lengte 1 is
- ▶ In hierdie geval is  $\mathbf{i} = (1; 0; 0)$ ;  $\mathbf{j} = (0; 1; 0)$  en  $\mathbf{k} = (0; 0; 1)$
- ▶  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$
- ▶  $\mathbf{u} = (|\mathbf{u}|\cos\alpha, |\mathbf{u}|\cos\beta, |\mathbf{u}|\cos\gamma)$
- ▶ Maar  $|\mathbf{u}| = 1$
- ▶ Dus  $\mathbf{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$
- ▶ En daarom kan die eenheidsvektor ook geskryf word as
- ▶  $\mathbf{u} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$



## Voorbeeld - Vind die Rigtinghoeke van 'n Vektor

Bepaal die rigtinghoeke van die vektor  $\mathbf{v} = i + 2j + 3k$ .

**Oplossing:**

Die lengte van die vektor  $v$  is  $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

**Vanuit die rigtinghoekformule kry ons:**

$$\alpha = \text{bgcos} \left( \frac{1}{\sqrt{14}} \right) = 1,3 \text{ rad}$$

$$\beta = \text{bgcos} \left( \frac{2}{\sqrt{14}} \right) = 1 \text{ rad}$$

$$\gamma = \text{bgcos} \left( \frac{3}{\sqrt{14}} \right) = 0,64 \text{ rad}$$

*Deur gebruik te maak van die eienskap van die rigtingshoeke:*

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

# Kombineer Vektore in 'n Ruimte

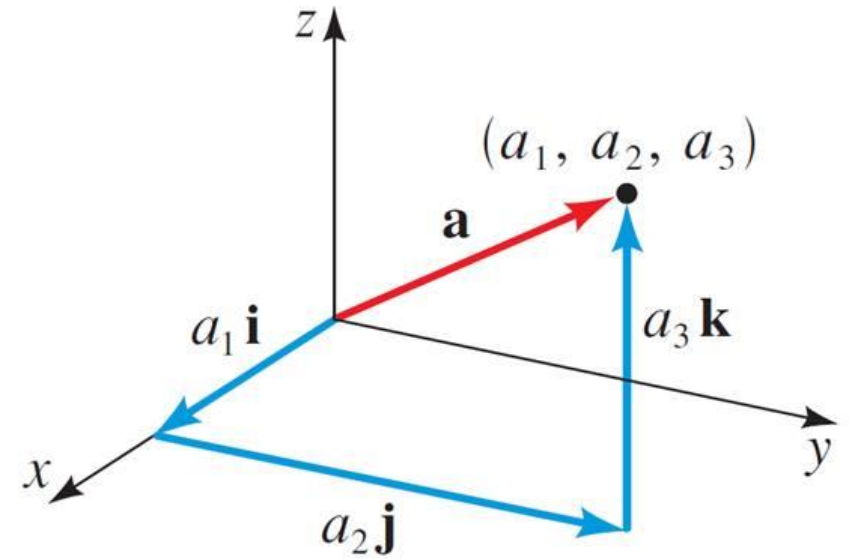
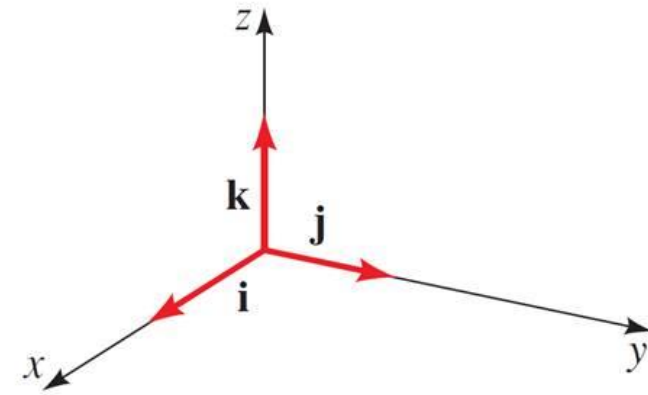
Ons weet dat 'n eenheidsvektor 'n vektor van lengte **1** is.

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle ; \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle ; \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Enige vektor in drie dimensies kan in terme van hierdie drie vektore geskryf word

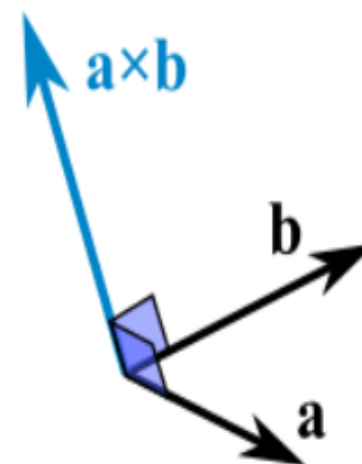
Die vektor **a** kan uitgedruk word in terme van **i**, **j** en **k**:

$$\mathbf{a} = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k})$$

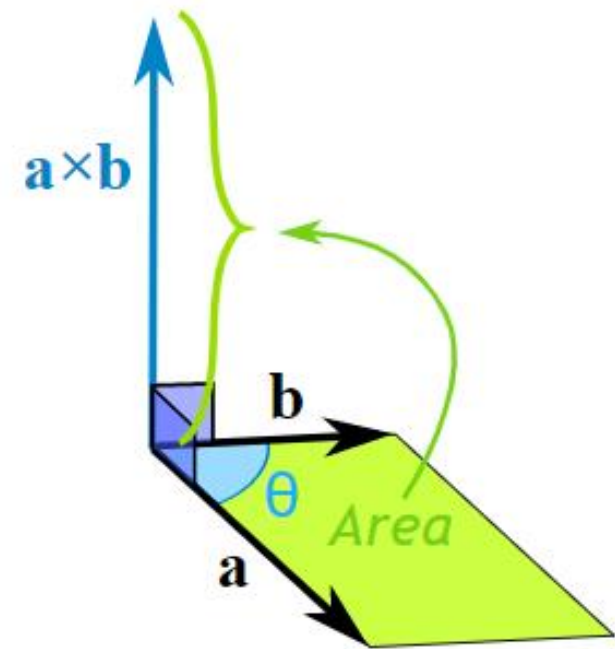


# Die kruisproduk

- ▶ Gegee twee vektore  $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  en  $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ , is dit soms nodig om 'n vektor  $\mathbf{w}$  te vind wat loodreg op beide  $\mathbf{a}$  en  $\mathbf{b}$  is .
- ▶  $\mathbf{w} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$ .
- ▶ Die kruisproduk is weer 'n vektor (slegs in 3D gedefinieer)
- ▶ <https://www.mathsisfun.com/algebra/vectors-cross-product.html>



- ▶ Die grootte van die kruisproduk gee die oppervlakte van die parallellogram wat gevorm word deur die twee vektore **a** en **b**



# Die kruisproduk

- Die definisie van die kruisproduk kan as volg geskryf word:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

# Voorbeeld: Bepaal die kruisprodukt:

► As  $\mathbf{u} = \langle 0, -1, 3 \rangle$  en  $\mathbf{v} = \langle 2, 0, -1 \rangle$ , bepaal  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .

► Oplossing:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (1 - 0)\mathbf{i} - (0 - 6)\mathbf{j} + (0 - (-2))\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

So die gevraagde vektor is  $\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ .

# Voorbeeld : Oppv van driehoek

- ▶ Bepaal die oppervlakte van 'n driehoek met hoekpunte  $P(1, 4, 6)$ ,  $Q(-2, 5, -1)$ , en  $R(1, -1, 1)$ .
- ▶ **Oplossing**  
Die vector  $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$  loodreg op beide  $\overrightarrow{PQ}$  en  $\overrightarrow{PR}$ , en is daarom loodreg op die vlak bepaal deur  $P$ ,  $Q$ , en  $R$ . (Bereken eers oppv van die parallellogram):
- ▶ Nou is
- ▶  $\overrightarrow{PQ} = (-2 - 1)\mathbf{i} + (5 - 4)\mathbf{j} + (-1 - 6)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
- ▶  $\overrightarrow{PR} = (1 - 1)\mathbf{i} + ((-1) - 4)\mathbf{j} + (1 - 6)\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

# Voorbeeld (vervolg)

- ▶ Bereken die kruisprodukt van hierdie vektore:

- ▶ 
$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

- ▶ 
$$= (-5 - 35)\mathbf{i} - (15 - 0)\mathbf{j} + (15 - 0)\mathbf{k}$$

- ▶ 
$$= -40\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$

- ▶ Dus:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15 \rangle$$

# Vb oplossing

cont'd

- ▶ Die oppervlakte van die parallelogram met aangrensende sye PQ en PR is die lengte (of die grootte) van die kruisproduk

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + 15^2}$$

$$= 5\sqrt{82}$$

- ▶ Die oppv van die driehoek PQR is die helfte van die oppv van parallelogram:
- ▶  $= \frac{5}{2}\sqrt{82}$

DANKIE!