

α -WISKUNDE

Alpha-wiskunde REKORDEKSAMEN

September 2025

Graad 12

Tyd: 3 uur

Totaal: 200 punte

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Hierdie vraestel bestaan uit sewe bladsye en 'n antwoordblad van twee bladsye. Die formuleblad bevat drie bladsye.
2. Beantwoord AL 11 vrae op hierdie vraestel.
3. Vraag 1 bestaan uit 15 meervoudige keusevrae. Beantwoord dit op die antwoordblad.
4. Skryf jou naam op die antwoordblad van die vraestel.
5. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n spesifieke vraag.
6. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot **twee desimale syfers** afgerond word.
7. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
8. **Alle hoeke word in radiale gegee.** Antwoorde moet in radiale gegee word waar van toepassing.
9. Toon alle noodsaaklike berekeninge duidelik aan by elke vraag. Die korrekte antwoord op sigself sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1 [30 PUNTE]

- Beantwoord hierdie vraag **op die antwoordblad**, deur telkens 'n X (kruisie) op A, B, C of D te maak.
- Moet asb. **NIE** hierdie bladsy losmaak van die vraestel nie.
- Hierdie vrae tel 2 punte elk.

1.1 Die produk van $2\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ en $6\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ is

- (A) $3\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (B) $12\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
 (C) $8\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ (D) $12\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

1.2 Indien $|2x + 1| = -x - 1$, watter een van die volgende is korrek?

- (A) $x = -\frac{2}{3}$ of $x = 0$ (B) $x = 0$
 (C) $x = -\frac{2}{3}$ (D) Geen oplossing nie

1.3 Die eerste drie terme in die binomiaaluitbreiding van $(1 - 2x)^5$ is

- (A) $1 - 10x + 40x^2$ (B) $1 - 10x - 80x^2$
 (C) $1 - 10x - 40x^2$ (D) $1 - 10x - 40x^3$

1.4 Vir watter waardes van x sal die uitbreiding van $\frac{1}{2+x}$ konvergeer?

- (A) $|x| > 2$ (B) $|x| > \frac{1}{2}$
 (C) $|x| < 2$ (D) $|x| < \frac{1}{2}$

1.5 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{as } x < 2 \\ 3 & \text{as } x > 2 \end{cases}$

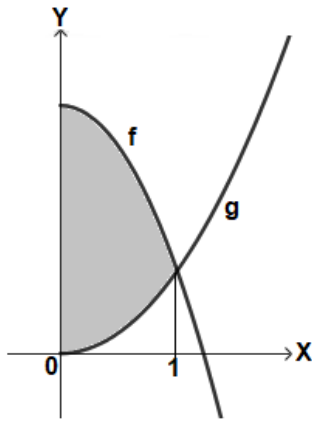
Watter tipe diskontinuiteit sal f by $x = 2$ hê?

- (A) verwyderbare diskontinuiteit (B) asimptotiese diskontinuiteit
 (C) sprong diskontinuiteit (D) Nie een van bogenoemde nie.

1.6 Die funksie $g(x) = \frac{3x^2+1}{x}$ het die volgende asimptoot:

- (A) Horisontaal: $y = 3$ (B) Horisontaal: $y = 1$
 (C) Skuins: $y = x$ (D) Skuins: $y = 3x$

1.11



Die oppervlakte tussen die grafieke van f en g roteer om die x -as, tussen $x = 0$ en $x = 1$. Die volume van dié liggaam wat só ontstaan kan bereken word deur

- (A) $\pi \int_0^1 [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$ (B) $\pi \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$
 (C) $\pi \int_0^1 [(f(x) - g(x))^2] dx$ (D) $\pi \int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$

1.12 Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $y = \log_3(x^4 - 1)$

- (A) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^4-1}$ (B) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{(x^4-1)\ln 3}$
 (C) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4-1}{\ln 3}$ (D) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4-1}{4x^3}$

1.13 Skryf as één logaritme: $\ln x - 2 \ln y - \ln z$

- (A) $\ln\left(\frac{xz}{2y}\right)$ (B) $\ln\left(\frac{x}{y^2z}\right)$
 (C) $\ln\frac{xz}{y^2}$ (D) $\ln\left(\frac{y^2z}{x}\right)$

1.14 Vereenvoudig: $i^{13} + i^{23} - i^6$

- (A) -1 (B) $-i$
 (C) 1 (D) i

1.15 Wat is die vertikale komponent van 'n vektor met grootte van 10, in die rigting $\frac{\pi}{3}$ radiale, noord van oos?

- (A) $5\sqrt{3}$ (B) 5
 (C) $10\sqrt{3}$ (D) 10

VRAAG 2 [21 PUNTE]

2.1 Gegee: $f(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3$

Faktoriseer die funksie f volledig in die reële getalstelsel, indien $x = 1 + \sqrt{2}$ 'n nulpunt van f is.

(4)

2.2 Die komplekse getalle $p = 6e^{\pi i}$ en $t = -\sqrt{3} - i$ word gegee.

(a) Skryf p en t in poolvorm.

(3)

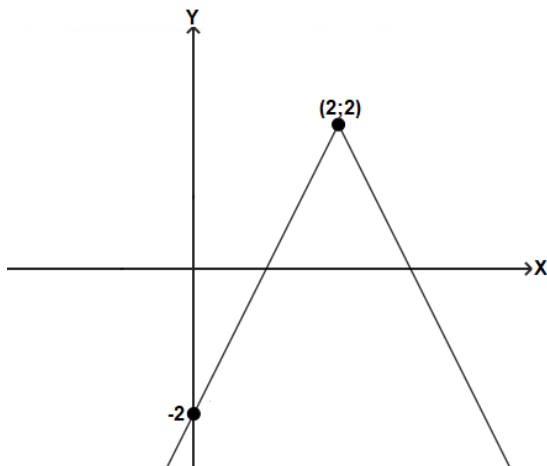
(b) Gebruik De Moivre se stelling en bereken $\left(\frac{p}{t}\right)^3$. Gee die antwoord in reghoekige vorm.

(6)

(c) Bereken \sqrt{t}

(3)

2.3 Die skets van $f(x) = a|bx + c| + b$ word hieronder gegee:



Die funksie f het 'n y -afsnit by $y = -2$ en 'n knakpunt by $(2; 2)$.

Bereken die waardes van a , b en c .

(5)

VRAAG 3 [22 PUNTE]

3.1 In 'n spesifieke elektriese stroombaan, word die spanning, V (volts) oor 'n kapasitor, gegee deur $V(t) = 5,9(1 - e^{-2kt})$. In hierdie formule is k 'n positiewe konstante en die veranderlike t verwys na die aantal sekondes wat reeds verloop het, ná die stroombaan aangeskakel is.

(a) Indien $t = 3$, sal die spanning oor die kapasitor gelyk wees aan 2,7 volt.

Bereken die waarde van k , korrek tot drie desimale plekke.

(5)

(b) Gebruik $k = 0,1$ en bepaal die tempo waarteen die spanning vermeerder wanneer $t = 2$. Gee die antwoord korrek tot twee desimale plekke.

(5)

3.2 Gegee: $f(x) = 2 \ln(x + 1) + 3$

- (a) Bereken die y -afsnit van die funksie f . (2)
- (b) Gebruik die Newton-Rhaphson-metode en bepaal die x -afsnit van die funksie f .
- Gebruik $x_0 = -0,8$ as eerste benadering.
 - Toon duidelik die formule waarmee jy werk.
 - Skryf die tweede benadering (x_1) tot vyf (5) desimale syfers neer.
 - Skryf die finale antwoord tot drie (3) desimale plekke neer. (5)
- (c) Bepaal die asimptoot van f . (1)
- (d) Teken 'n grafiek van $|f(x)|$. Dui al bogenoemde punte duidelik aan. (4)

VRAAG 4 [15 PUNTE]

4.1 Gebruik wiskundige induksie en toon dat die volgende bewering waar is vir alle $n \in \mathbb{N}$: (10)

$$\sum_{r=1}^n 2^{2-r} = 4 - 2^{2-n}$$

4.2 Die vierde term, in die binomiaaluitbreiding van $\sqrt{1+ax}$, is $-\frac{x^3}{128}$. Bepaal die waarde van a . (5)

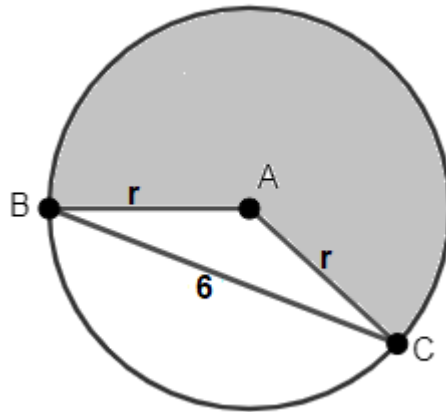
VRAAG 5 [16 PUNTE]

5.1 Gegee: $f(x) = 2b \tan(x - 1) - \frac{\pi}{3}$

- (a) Bepaal die inverse van die funksie f . (3)
- (b) Bepaal die waardeversameling van f . (2)
- (c) Die grafiek van f ondergaan die volgende veranderings:
- Reflekteer om die y -as.
 - Skuif $\frac{\pi}{6}$ eenhede af.
 - Verklein met faktor 3.

Gee die nuwe funksie, $g(x)$, wat só ontstaan. (3)

5.2 'n Sirkel met middelpunt A en radius r is hieronder gegee. Die omtrek van die sirkel is 20cm. Koord BC is 6cm.



- (a) Toon aan dat $r = \frac{10}{\pi}$. (2)
- (b) Bepaal die grootte van die stomphoek BAC. Gee jou antwoord korrek tot drie desimale plekke. (3)
- (c) Bepaal die oppervlakte van die gearseerde gedeelte. Aanvaar dat die stomphoek BAC=2,5 radiale. (3)

VRAAG 6 [11 PUNTE]

- 6.1 Punte P(1;-1;3) en T(-1;2;0) word gegee. Bepaal die afstand tussen P en T. Gee jou antwoord in wortelvorm. (2)
- 6.2 (a) Bepaal 'n vektor, w , wat loodreg op die vektore $u = i + 2j - k$ en $v = -i + j$ is. (5)
- (b) Is vektore u en v ewewydig? Motiveer jou antwoord. (2)
- (c) Bepaal die grootte van die hoek tussen u en v , indien $|u| = \sqrt{6}$ en $|v| = \sqrt{2}$ (2)

VRAAG 7 [22 PUNTE]

- 7.1 Gegee: $f(x) = \begin{cases} 2^{3x} + 1 & \text{as } x \leq p \\ 2 & \text{as } x > p \end{cases}$
- (a) Die funksie f is kontinu by $x = p$. Toon aan dat $p = 0$. (4)
- (b) Is die funksie differensieerbaar by $x = p$? Bepaal die afgeleide funksie van f en motiveer jou antwoord volledig. (6)
- 7.2 Bepaal die afgeleides van die volgende:
- (a) $f(x) = \tan(\arccos(2x))$ (3)
- (b) $2xy^3 + \frac{1}{5y} = ex$ (Wenk: Gebruik implisiete differensiasie.) (9)

VRAAG 8 [15 PUNTE]

Gegee: $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x-2}$

- 8.1 Bepaal en klassifiseer die asimptote van die funksie f . (4)
- 8.2 Toon algebraïes aan dat die funksie daal vir alle $x \in \mathbb{R}$. (5)
- 8.3 Dit is gegee dat $f\left(\frac{1}{2}\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Die funksie het geen stasionêre punte nie. Gebruik die antwoordblad en skets die grafiek van f . (6)

VRAAG 9 [16 PUNTE]

Gegee: $f(x) = (2x - 3)^5 + e$

- 9.1 Bepaal die koördinate van die stasionêre punt van die funksie f . Gee die antwoord i.t.v. e . (7)
- 9.2 Gebruik die tweede afgeleide om die stasionêre punt te klassifiseer en motiveer jou antwoord volledig. (9)

VRAAG 10 [16 PUNTE]

10.1 Bepaal die volgende integrale:

- (a) $\int (\sin^2(3x) - \operatorname{cosec}^2 x) dx$ (5)
- (b) $\int x^2 \cdot 5^{4x^3-1} dx$ (3)
- (c) $\int (e^{3x-1} + \ln 2) dx$ (3)

- 10.2(a) Die funksie $f(x) = \frac{-x^2+4x+1}{(2x+1)(1+x^2)}$ kan geskryf word as $f(x) = \frac{A}{2x+1} + \frac{2}{1+x^2}$. Toon aan dat $A = -1$. (2)
- (b) Vervolgens, bepaal $\int f(x) dx$ (3)

VRAAG 11 [16 PUNTE]

- 11.1 Gebruik **faktorintegrasie** en toon aan dat die oppervlakte tussen die grafiek van $y = (2x + 1) \ln x$, die x -as en die punte $x = 1$ en $x = e$ gelyk is aan $\frac{1}{2}(e^2 + 3)$. **Toon alle berekeninge.** (7)
- 11.2 Bepaal $\int_1^3 (-x^2 + 1) dx$ m.b.v. 'n Riemannsom. (9)

Totaal: 200