

α -WISKUNDE

Junie 2024

Graad 12

Tyd: 3 uur

Totaal: 200 punte

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Hierdie vraestel bestaan uit ses bladsye, 'n antwoordblad van vier bladsye en 'n formuleblad van drie bladsye.
2. Beantwoord AL elf vrae.
3. Nommer die antwoorde soos die vrae genummer is.
4. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n vraag.
5. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot **twee desimale syfers** afgerond word.
6. **Dui alle noodsaaklike berekeninge**, diagramme, grafieke ensovoorts wat jy gebruik het om jou antwoorde te bepaal, duidelik aan.
7. Volpunte sal nie noodwendig aan slegs antwoorde toegeken word nie.
8. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
9. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word indien nodig.
10. Skryf netjies en leesbaar.

Vraag 1 [30 punte]

- Beantwoord hierdie vraag **op die antwoordblad**, wat voor aangeheg is, deur telkens 'n X (kruisie) op A, B, C of D te maak.
- Moet asb. **NIE** hierdie antwoordblad losmaak van die vraestel nie.
- Hierdie vrae tel 2 punte elk.

1.1 Indien $z^2 = 9\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, wat is die waarde(s) van z ?

- (A) $z = 3\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (B) $z = 3\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
(C) $z = 3\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$ of $z = 3\text{cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ (D) $z = 3\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ of $z = 3\text{cis}\left(\frac{13\pi}{3}\right)$

1.2 Los op vir x indien $-\frac{|2x+1|}{3} < 1$

- (A) $x < -2$ of $x > 1$ (B) $x \in \mathbb{R}$
(C) $-2 < x < 1$ (D) Geen oplossing nie

1.3 Watter een van die volgende vergelykings is 'n asimptoot van $f(x) = e^{3x-1} - 2$?

- (A) $x = \frac{1}{3}$ (B) $y = 2$
(C) $x = -\frac{1}{3}$ (D) $y = -2$

1.4 Die kwosiënt van $2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ en $6\text{cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ is

- (A) $\frac{1}{3}\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\frac{1}{3}\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$
(C) $3\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (D) $3\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

1.5 In die uitbreiding van $\frac{1}{1-x}$, sal die vierde term gelyk wees aan

- (A) $\frac{x^3}{6}$ (B) x^3
(C) $\frac{-x^3}{6}$ (D) $-x^3$

1.6 Twee vektore \mathbf{p} en \mathbf{q} sal loodreg op mekaar wees indien

- (A) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$ (B) $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = 0$
(C) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \neq 0$ (D) $\mathbf{p} \times \mathbf{q} \neq 0$

- 1.7 Die x -koördinaat/koördinate van die stasionêre punt van $f(x) = x + \frac{1}{x}$ is
- (A) $x = 0$ (B) $x = -1$
(C) $x = 1$ (D) $x = \pm 1$
- 1.8 Indien M 'n 2×3 -matriks is en N 'n 4×2 -matriks is, watter een van die volgende bewerkings sal moontlik wees?
- (A) MN (B) $M + N$
(C) NM (D) $M - N$
- 1.9 Indien 'n funksie 'n lokale maksimum by $x = 2$ het, watter een van die volgende is korrek?
- (A) $f(2) > 0$ (B) $f''(2) > 0$
(C) $f(2) < 0$ (D) $f''(2) < 0$
- 1.10 Vir watter waardes van x sal die uitbreiding van $\sqrt{3+x}$ konvergeer?
- (A) $|x| < \frac{1}{3}$ (B) $|x| > \frac{1}{3}$
(C) $|x| < 3$ (D) $|x| > 3$
- 1.11 Bepaal die skuins asimptoot van $y = \frac{x^2+x-3}{x}$
- (A) $y = x + 1$ (B) $y = x$
(C) $y = x^2 + x - 3$ (D) Nie een van bogenoemde nie.
- 1.12 Skryf as één logaritme: $y = \ln x - 5 \ln y - \ln z$
- (A) $y = \ln\left(\frac{xz}{y^5}\right)$ (B) $y = \ln\left(\frac{x}{y^5 z}\right)$
(C) $y = \ln\left(\frac{x}{5yz}\right)$ (D) $y = \ln\left(\frac{xz}{5y}\right)$
- 1.13 Met watter formule kan die oppervlakte onder die kromme $y = \sec^2\left(\frac{x}{4}\right)$ bepaal word?
- (A) $\frac{\tan\left(\frac{x}{4}\right)}{4} + k$ (B) $\frac{-\tan\left(\frac{x}{4}\right)}{4} + k$
(C) $4 \tan\left(\frac{x}{4}\right) + k$ (D) $-4 \tan\left(\frac{x}{4}\right) + k$

Vraag 4 [15 punte]

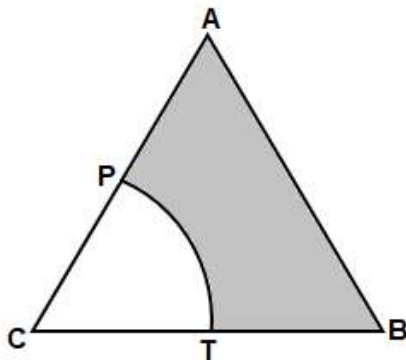
- 4.1 Bepaal $f(-3)$ indien $f(x) = \text{bgcos}(e^{2x+5})$ (2)
- 4.2 Los op vir x : $\ln(e^{2x} - 12) = x$ (6)
- 4.3 Bepaal die inverse van $y = \frac{e^{3x}}{2} + 1$ (4)
- 4.4 Gebruik die antwoordblad en skets die grafiek van $y = 2\ln(x - 1)$.
Toon duidelik die afsnitte met die asse en die asimptoot,
indien van toepassing, aan. (3)

Vraag 5 [15 punte]

- 5.1 Bepaal die koëffisiënt van x^{-2} in die binomiaaluitbreiding van $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$. (6)
- 5.2 Gebruik wiskundige induksie en toon aan dat die volgende bewering
waar is vir alle $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (9)

Vraag 6 [17 punte]

- 6.1 Die diagram toon 'n gelyksydige driehoek ABC met sylengtes van 4cm. P en T is die middelpunte van AC en CB onderskeidelik. CPT is 'n sektor van 'n sirkel met middelpunt C.



- a) Bepaal die omtrek van sektor CPT. Gee jou antwoord i.t.v. π . (2)
- b) Bepaal die oppervlakte van sektor CPT. Gee jou antwoord i.t.v. π . (2)
- c) Vervolgens, bepaal die oppervlakte van die gearseerde gedeelte, PABT.
Gee jou antwoord as 'n desimale getal. (4)
- 6.2 Gegee vektore $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ en $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
- a) Bepaal die eenheidsvektor van \mathbf{a} . (3)
- b) Bepaal die hoek wat \mathbf{a} met die z -as maak. (2)
- c) Bepaal twee vektore loodreg op die vlak wat gevorm word deur \mathbf{a} en \mathbf{b} . (4)

Vraag 7 [14 punte]

7.1 Gegee: $f(x) = \text{bgtan}(x + 1) + \frac{\pi}{2}$

Gebruik die antwoordblad en skets die grafiek van f .

Toon duidelik die afsnitte met die asse, asook die asimptote, indien van toepassing, aan. (4)

7.2 Gegee: $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

a) Bepaal die koördinate van die buigpunt van f . (5)

b) Motiveer volledig waarom jou antwoord in (a) 'n buigpunt is. (5)

Vraag 8 [17 punte]

8.1 Gebruik die antwoordblad en skets voorbeelde van die volgende: (8)

a) 'n Sprongdiskontinuuïteit

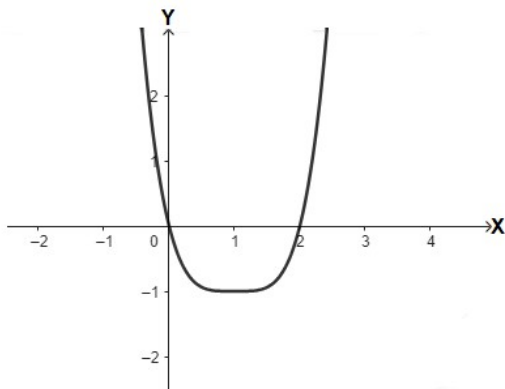
b) Twee verskillende voorbeelde van 'n verwyderbare diskontinuuïteit

c) 'n Kontinue funksie wat nie differensieerbaar is nie.

8.2 Differensieer die volgende funksies:

a) $f(x) = \tan^3(x^2) - \frac{1}{7x}$ (4)

b) $y = \text{bgtan}(2x) + \log(\sin x)$ (5)

Vraag 9 [18 punte]9.1 Die funksie f'' is gegee. Die funksie het x -afsnitte by $x = 0$ en $x = 2$ en 'n stasionêre punt by $x = 1$.Gee al die x -waardes waarvoor die volgende waar is:a) Die funksie f buig konkaaf op.b) Die funksie f' daal.c) Die funksie f' het 'n stasionêre punt. (6)9.2 a) Gebruik implisiete differensiasie en bepaal $\frac{dy}{dx}$ indien $e^y \sqrt{x} = ey^2$ (8)

b) Vervolgens, bepaal die vergelyking van die raaklyn deur die punt (1; 1) (4)

Vraag 10 [19 punte]

10.1 Gegee: $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2}$

a) Bepaal die asimptote van die funksie en klassifiseer die asimptote. (4)

b) Die funksie sny één van die asimptote. Bepaal die x -koördinaat van hierdie snypunt. (3)c) Bepaal die x -waardes waarvoor f styg. (4)

10.2 a) Differensieer $y = 2^{3x-1} + \ln(x+1)$ (4)

b) Vervolgens, gebruik **Newton se metode** en bepaal die snypunt, tot vyf (5) desimale plekke, van $f(x) = 2^{3x-1} + \ln(x+1)$ en $g(x) = \ln 2$.Gebruik $x = 0,2$ as eerste benadering. Toon duidelik hoe jy Newton se metode gebruik. (4)**Vraag 11 [18 punte]**

11.1 Vereenvoudig:

a) $\int (5^{7x} - e^{2x}) dx$ (5)

b) $\int \left(\frac{3}{(4x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)} \right) dx$ (4)

c) $\int \left(\frac{e}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln 5 \right) dx$ (3)

11.2 Bepaal die volume van die omwentelingsliggaam wat ontstaan indien die funksie $y = \sqrt{x+\pi}$ om die x -as roteer, tussen $x = p$ en $x = 0$. ($p < 0$) Gee jou antwoord i.t.v. p . (6)**Totaal: 200**