

# $\alpha$ -WISKUNDE

## Alpha-wiskunde REKORDEKSAMEN

September 2024

Graad 12

Tyd: 3 uur

Totaal: 200 punte

### INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Hierdie vraestel bestaan uit nege bladsye en 'n antwoordblad van drie bladsye. Die formuleblad bevat drie bladsye.
2. Beantwoord AL 11 vrae op hierdie vraestel.
3. Vraag 1 bestaan uit 15 meervoudigekeusevrae. Beantwoord dit op die antwoordblad.
4. Skryf jou naam op die antwoordblad van die vraestel.
5. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n spesifieke vraag.
6. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot **twee desimale syfers** afgerond word.
7. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
8. **Alle hoeke word in radiale gegee.** Antwoorde moet in radiale gegee word waar van toepassing.
9. Toon alle noodsaaklike berekeninge duidelik aan by elke vraag. Die korrekte antwoord op sigself sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Skryf netjies en leesbaar.



1.7 Watter een van die volgende sal 'n raaklyn aan die funksie  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  by  $x = 4$  wees?

(A)  $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$

(B)  $y = -\frac{x}{4}$

(C)  $y = \frac{x}{2}$

(D)  $y = -\frac{x}{16} + \frac{3}{4}$

1.8 Gegee:  $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} & \text{as } x < 2 \\ k & \text{as } x = 2 \\ -x^2 + 4 & \text{as } x > 2 \end{cases}$

Vir watter waarde van  $k$  sal  $f$  kontinu wees?

(A)  $k = 2$

(B)  $k = -2$

(C)  $k = 0$

(D)  $k = 4$

1.9 Die funksie  $y = f(x)$  het 'n lokale maksimum by  $x = 1$ . Watter een van die volgende bewerings is waar?

(A)  $f'(1) > 0$

(B)  $f''(1) > 0$

(C)  $f'(1) < 0$

(D)  $f''(1) < 0$

1.10 Die funksie  $y = \cos(3x)$  roteer om die  $x$ -as. Watter een van die volgende kan gebruik word om die volume van die omwentelingsliggaam wat ontstaan, te bepaal?

(A)  $\frac{\pi}{2} \int [1 + \cos(3x)] dx$

(B)  $\frac{\pi}{2} \int [1 + \cos(6x)] dx$

(C)  $\int [1 + \cos(3x)] dx$

(D)  $\int \cos(3x) dx$

1.11 Indien  $F(x) = (f \circ g)(x) = \sqrt{9x^2 + 9} - x^2 - 1$ , dan is

(A)  $f(x) = \sqrt{9x^2 + 9}$  en  $g(x) = x^2 - 1$

(B)  $f(x) = 3\sqrt{x} - x$  en  $g(x) = x^2 + 1$

(C)  $f(x) = x^2 - 1$  en  $g(x) = 9x$

(D) Nie een van bogenoemde nie.

1.12 Die stelsel vergelykings  $2x + y - 3 = 0$  en  $-x = 3y - 4$  kan met Cramer se reël opgelos word. Om  $y$  te bereken, watter een van die volgende moet gebruik word?

(A)  $\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}$

(B)  $\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}$

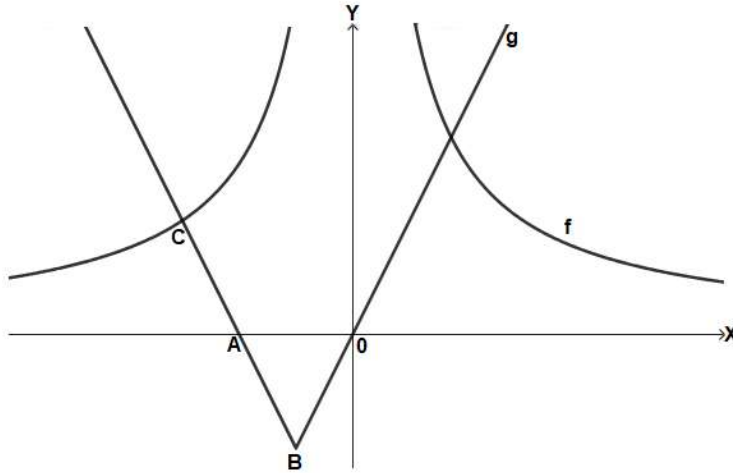
(C)  $\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}}$

(D)  $\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}}$



**VRAAG 3 [20 PUNTE]**

3.1 Die grafieke van  $f(x) = \frac{k}{x}$  en  $g(x) = 2|x + 1| - 2$  word hieronder geskets.



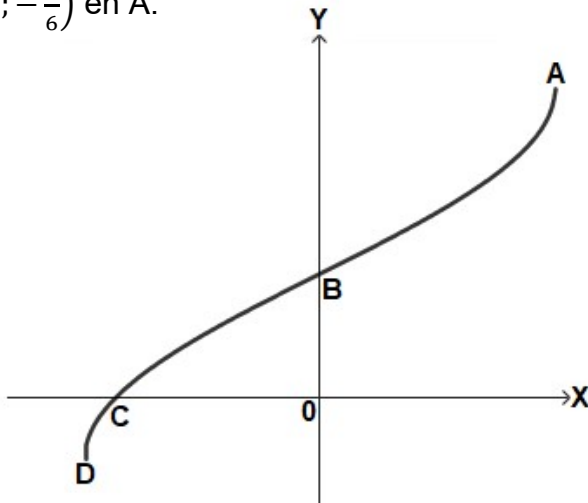
- a) Bepaal die waarde van  $k$  indien  $(-6; 1)$  'n punt op  $f$  is. (2)
- b) Bepaal die koördinate van A, een van die  $x$ -afsnitte van  $g$ . (3)
- c) Bepaal die koördinate van B, die knakpunt van  $g$ . (2)
- d) Bereken  $x$  indien  $g(x) - 4 < 0$ . (3)
- e) Bepaal die koördinate van C, een van die sny punte van  $f$  en  $g$ . (5)
- 3.2 Die funksie  $h(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + p$  het nulpunte  $x = -\sqrt{2}$  en  $x = 2$ . Bepaal die waarde van  $p$ . (5)

**VRAAG 4 [20 PUNTE]**

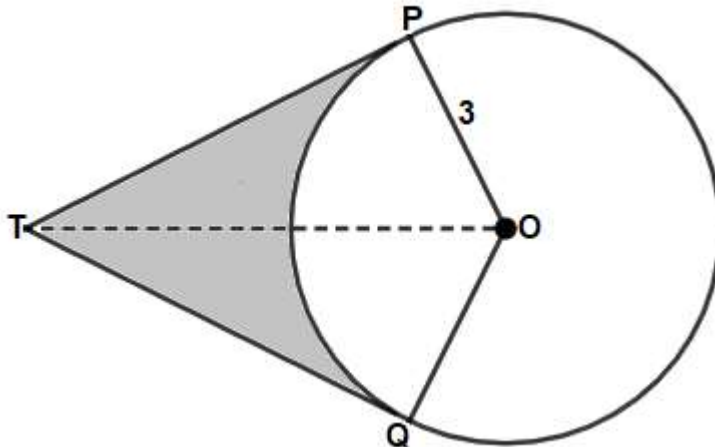
- 4.1 a) Bepaal die eerste drie terme van  $(1 + 2x)^4$ . (4)
- b) Bepaal die eerste drie terme van  $\sqrt[4]{1 + 2x}$ . (4)
- c) Vervolgens, of andersins, bepaal die koëffisiënt van  $x^2$  van  $(\sqrt[4]{1 + 2x})(1 + 2x)^4$ . (3)
- 4.2 Gebruik wiskundige induksie en toon dat die volgende bewering waar is vir alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $\frac{3}{4} + \frac{3}{2} + 3 + \dots + \binom{3}{4} (2^{n-1}) = -\binom{3}{4} (1 - 2^n)$ . (9)

**VRAAG 5 [17 PUNTE]**

- 5.1 Die skets van  $g(x) = b\sin(px) + \frac{\pi}{3}$  is hieronder gegee. Die grafiek sny die  $x$ - en  $y$ -as by C en B onderskeidelik. Die begin- en eindpunte van die grafiek is by  $D(-2; -\frac{\pi}{6})$  en A.



- Toon aan dat  $p = \frac{1}{2}$ . (3)
  - Bepaal die koördinate van B, die  $y$ -afsnit van  $g$ . (2)
  - Bepaal die definisieversameling van  $g$ . (2)
- 5.2 In die onderstaande diagram is O die middelpunt van 'n sirkel met 'n radius van 3cm. P en Q is punte op die sirkelomtrek en die raaklyne PT en QT sny mekaar by T.



- Bereken die grootte van  $\hat{POT}$ , indien die booglengte  $PQ=6\text{cm}$ . (2)
- Bepaal die lengte van PT.  
Gee jou antwoord korrek tot drie desimale plekke. (2)
- Bereken die oppervlakte van sektor POQ. (2)
- Bepaal die oppervlakte van die ingekleurde gedeelte. Gebruik  $PT=4,7\text{cm}$ . (4)

**VRAAG 6 [12 PUNTE]**

6.1 Gegee: Vektore  $\mathbf{A} = (2; 1; -2)$  en  $\mathbf{B} = (3; -1; p)$

- a) Die afstand tussen  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  is 3 eenhede. Een moontlike waarde van  $p$  is 0. Bereken die ander moontlike waarde van  $p$ . (3)
- b) Bepaal die grootte van die hoek wat vektor  $\mathbf{A}$  met die  $z$ -as maak as  $|\mathbf{A}| = 3$ . (2)
- c) Is  $\mathbf{A}$  en  $\mathbf{B}$  loodreg op mekaar? Gebruik  $p = 0$  en motiveer jou antwoord. (3)

6.2 Vektor  $-i + 5j + 2k$  is loodreg op die vektore  $\mathbf{p} = ai - j + 3k$  en  $\mathbf{q} = 2i + k$ . Bepaal die waarde van  $a$ . (4)

**VRAAG 7 [15 PUNTE]**

7.1 Wanneer sal 'n funksie  $f$  die volgende diskontinuiteit by  $x = a$  hê? Lig jou antwoord toe met 'n skets.

- a) Sprongdiskontinuiteit (2)
- b) Verwyderbare diskontinuiteit (Noem twee voorwaardes.) (4)

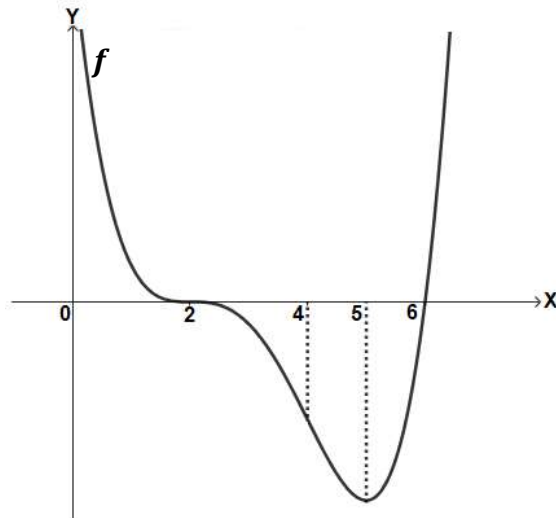
7.2 Gegee:  $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 1 & \text{as } x < 1 \\ 1 & \text{as } x = 1 \\ -x + 2 & \text{as } x > 1 \end{cases}$

Die funksie  $f$  is kontinu by  $x = 1$ . Bepaal algebraïes of  $f$  differensieerbaar is by  $x = 1$ . (4)

7.3 Bepaal  $\frac{dy}{dx}$  as  $y = [\log_5(\operatorname{cosec}(2x))]^3$  (5)

**VRAAG 8 [19 PUNTE]**

- 8.1 Die grafiek van die funksie  $f$  is hieronder gegee. Die funksie het stasionêre punte by  $x = 2$  en  $x = 5$  en buigpunte by  $x = 2$  en  $x = 4$ . Die  $x$ -as word gesny by  $x = 2$  en  $x = 6$ .



- a) Gee die  $x$ -waarde(s) sodat (5)
- (i)  $f'(x) > 0$
  - (ii)  $f'$  'n stasionêre punt het.
  - (iii)  $f'$  'n  $x$ -afsnit het.
- b) Gebruik die antwoordblad en teken 'n moontlike skets van  $f''$ . (6)
- 8.2 Gebruik implisiete differensiasie en bepaal  $\frac{dy}{dx}$  as  $\text{bgcos}(y) = x^3y^3$  (8)

**VRAAG 9 [19 PUNTE]**

- 9.1 Gegee:  $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x}$
- a) Bepaal die asimptote van die funksie en klassifiseer die asimptote. (4)
  - b) Dit word gegee dat  $f(-2) = f(1) = 0$ . Die funksie styg vir alle  $x \in \mathbb{R}$  en het geen stasionêre punte nie. Gebruik die antwoordblad en teken 'n duidelike skets van  $f$ . (6)
- 9.2 Gegee:  $h(x) = 3^{-2x} + \pi x$
- a) Die funksie  $h$  het 'n minimum in die interval  $[-1; 0]$ . Bepaal 'n vergelyking waarmee die  $x$ -koördinaat van hierdie stasionêre punt bereken kan word. (4)
  - b) Gebruik **Newton se metode** en bepaal hierdie  $x$ -waarde akkuraat tot vier desimale plekke. Gebruik  $x = -0,2$  as eerste benadering. Toon duidelik aan hoe jy Newton se metode gebruik. (5)

**VRAAG 10 [16 PUNTE]**

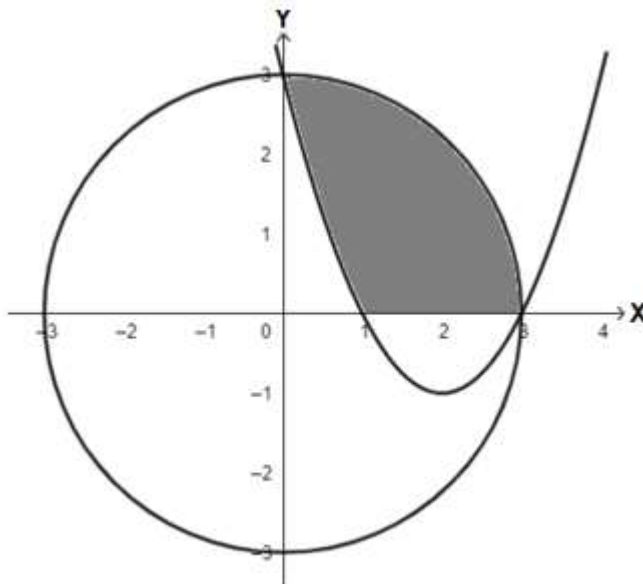
10.1 Bepaal die volgende integrale:

a)  $\int \sec^2 x \cdot \tan^5 x \, dx$  (2)

b)  $\int \frac{e}{1+3x} \, dx$  (2)

10.2 Gebruik faktorintegrasië en bepaal  $\int (5x - 3)e^{-2x} \, dx$  (5)10.3 a) Ontbind  $\frac{4x^2-3x+1}{3x(1+4x^2)}$  in partiële breuke. (4)

b) Vervolgens, bepaal  $\int \frac{4x^2-3x+1}{3x(1+4x^2)} \, dx$  (3)

**VRAAG 11 [16 PUNTE]**11.1 Gebruik 'n Riemannsom en bepaal  $\int_1^4 (-x + x^2) \, dx$  (9)11.2 Die sketse van  $x^2 + y^2 = 9$  en  $y = x^2 - 4x + 3$  word hieronder gegee.

Die grafieke sny mekaar by  $(0; 3)$  en  $(3; 0)$ . Die grafiek van  $g$  sny die  $x$ -as by  $x = 1$  en  $x = 3$ . Bepaal die oppervlakte van die gearseerde gedeelte. Gee jou antwoord as 'n desimale getal.

(7)

**Totaal: 200**