

Alpha Wiskunde

Graad 12 Eksamenvraestel

23 Oktober 2015

Totaal: 200 punte

Tyd: 3 ure

INSTRUKSIES

1. Nommer die antwoorde presies soos die vrae genummer is.
2. Skryf netjies en leesbaar.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word.
4. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
5. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet ook in radiale gegee word indien nodig.
6. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
7. Hierdie vraestel bestaan uit 8 bladsye en 3 formuleblaaie.
8. Afdeling A Vraag 1 bestaan uit 10 multikeuse vrae. Beantwoord dit op die antwoordblad.
9. By Afdeling B moet alle noodsaaklike berekeninge duidelik getoon word.

Afdeling A

Beantwoord hierdie vraag op die antwoordblad deur telkens X op A, B, C of D te maak.

VRAAG 1

1.1 Gegee:

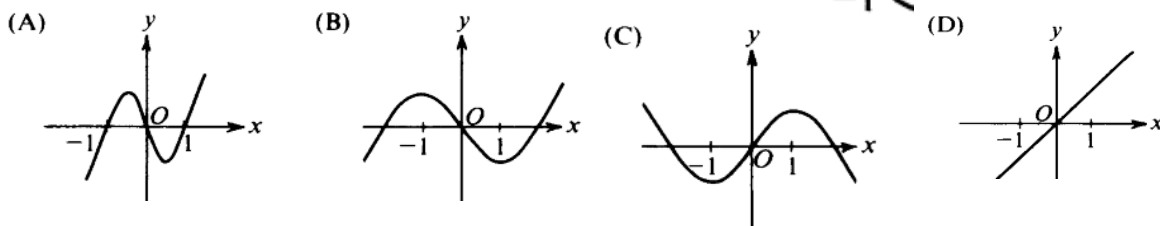
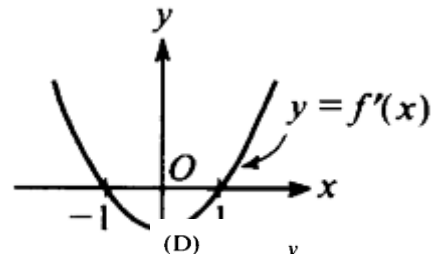
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Dit beteken dat by $x = a$ die funksie altyd

- (A) kontinuu is. (B) differensieerbaar is.
 (C) 'n verwyderbare diskontinuuiteit het. (D) 'n sprong diskontinuuiteit het.

1.2 Die skets regs toon die grafiek van $y = f'(x)$, die afgeleide van $y = f(x)$.

Watter van die volgende kan 'n skets van $y = f(x)$ wees?

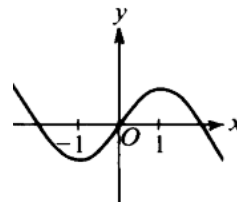


1.3 Vir watter waardes van x sal die funksie $f(x) = x^2 - 4x - 5$ dalend wees?

- A $x < -1$ of $x > 5$ B $-1 < x < 5$
 C $x < 2$ D $x > 2$

1.4 Die grafiek van $y = f(x)$ word regs getoon.

Dan is $\frac{dy}{dx} = 0$ en $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ by $x =$



- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) Onmoontlik om te sien

1.5 Die grafiek van $\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{(x-1)(x+2)} = f(x)$ sal by $x = 1$

- (A) 'n x -afsnit hê (B) 'n vertikale asimptoot hê
 (C) 'n draaipunt hê (D) ongedefinieerd wees

1.6 As $|x| = 2x - 1$, dan is $x =$

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) 1 (C) 1 of $\frac{1}{3}$ (D) geen oplossing

1.7 Die inverse funksie van $f(x) = \sin(2x)$ sal gedefinieer wees indien f se definisiewersameling (gebied) beperk word tot $x \in$

- (A) $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ (B) $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (C) $[-\pi; \pi]$ (D) $[-2\pi; 2\pi]$

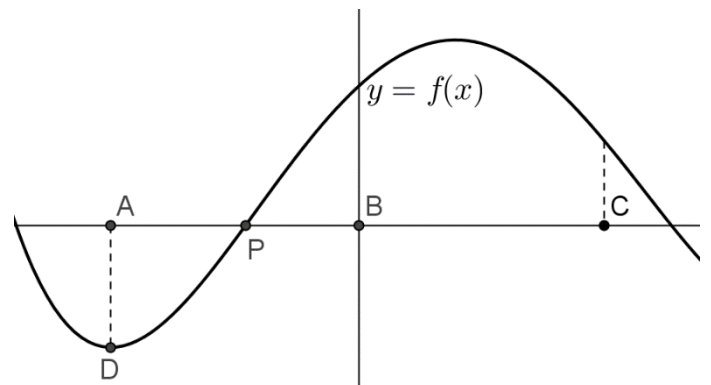
1.8 As daar 'n raaklyn getrek word aan $y = e^x$ by enige punt $(x; y)$, dan sal die gradiënt van hierdie raaklyn gelyk wees aan:

- (A) 1 (B) 0 (C) y (D) x

1.9 Die grafiek van $y = f(x)$ word getoon. D is die minimum draaipunt van f .

Newton se metode moet gebruik word om die x -afsnit by P te vind. As aanvangswaarde kan die x -waarde by die volgende punt(e) gebruik word:

- (A) A (B) B
 (C) C (D) A, B of C.



1.10 As $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, dan is $\frac{dy}{dx} =$

- (A) $\frac{1}{x}$ (B) x (C) $-\frac{1}{x^2}$ (D) $-\frac{1}{x}$

[20]

Afdeling B**VRAAG 2**

2.1 Wanneer 'n kamera 'n foto neem met 'n flits kan die lading op die battery bepaal word met die vergelyking $L(t) = m(1 - e^{-\frac{t}{a}})$, waar m die maksimum lading van die battery is en t die tyd wat dit neem in sekondes. Na 4,6 sekondes daal die lading na 90% van die oorspronklike lading, dus $\frac{L(t)}{m} = 0,9$. Bereken die waarde van a . Gee die antwoord as 'n heelgetal. (4)

2.2 Gegee: $f(x) = |\ln(x + 1) - 1|$

(a) Bepaal die x - en y -afsnitte van f asook die vergelyking van die asimptoot. Gee antwoorde korrek tot een desimale syfer indien nodig. (7)

(b) Maak vervolgens 'n sketsgrafiek van $y = f(x)$ en toon die inligting verkry in **vraag 2.2 (a)** duidelik aan. (5)

2.3 $x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 10x + 2$ het 'n nulpunt by $x = 2 + \sqrt{5}$, faktoriseer die uitdrukking volledig in $\mathbb{Q}[x]$. (7)

[23]**VRAAG 3**

3.1

(a) Bepaal en vereenvoudig die eerste twee terme van $(2x - x^2)^6$ (4)

(b) Bepaal en vereenvoudig die eerste drie terme van $\sqrt{1-x}$ (6)

(c) Bepaal vervolgens die koëffisiënt van x^7 in die uitbreidings van $\sqrt{1-x} \cdot (2x - x^2)^6$ (3)

3.2 Gebruik wiskundige induksie en bewys dat

$$6 + 3 + \frac{3}{2} + \dots + 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 12 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad (11)$$

[24]

VRAAG 4

4.1 Die volgende stelsel vergelykings word gegee:

$$(a + 1)x - y = 11 \quad \text{en} \quad ax + y = 9$$

(a) Skryf die stelsel in matriksvorm. (3)

(b) Gebruik Cramer se metode en bepaal die waarde van x in terme van a . Toon die matrikse wat jy gebruik duidelik aan. (8)

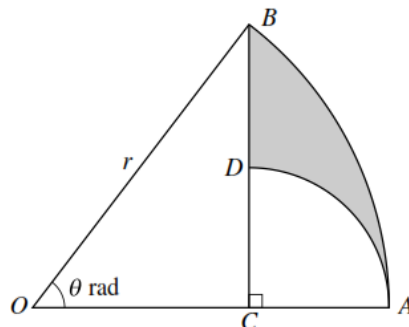
(c) Bepaal vervolgens die waarde van a indien dit gegee is dat $x = 4$. (3)

4.2 Gebruik de Moivre se stelling en toon aan dat $(-1 + i)^8$ reëel is. Die hoeke moet in terme van π geskryf word by die berekening in poolvorm. (6)

[20]

VRAAG 5

5.1 Die diagram toon 'n sektor OAB van 'n sirkel met radius r . Hoek AOB is θ radiale. Die punt C op OA is so dat $BC \perp OCA$. Die punt D is op BC en die sirkelboog AD se middelpunt is C .



(a) Toon aan dat $BD = r \cos \theta + r \sin \theta - r$ (5)

(b) Bepaal die omtrek van die gearseerde gedeelte indien $\theta = 1$ en $r = 12$ (4)

5.2

(a) Bepaal die inverse funksie van $f(x) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 1$ (4)

(b) Bepaal die vergelykings van die asimptote van $y = b \tan x - \frac{\pi}{4}$ (3)

[16]

VRAAG 6

6.1 Gebruik differensiasie reëls en differensieer. Dit is nie nodig om die antwoord te vereenvoudig nie.

(a) $f(x) = bgsin(e^x)$ (3)

(b) $y = (x^4 - 2x)^{10} \times \cot(2x)$ (5)

6.2 Gebruik implisiete differensiasie en bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $\sin\left(\frac{x}{y}\right) = y^2 - \pi$ (7)

6.3 $f(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot bgsinx$
 (a) Toon aan dat $f'(x) = bgsinx$ (6)
 (b) Bepaal vervolgens $\int bgsin(2x) dx$ (3)

[24]**Vraag 7**

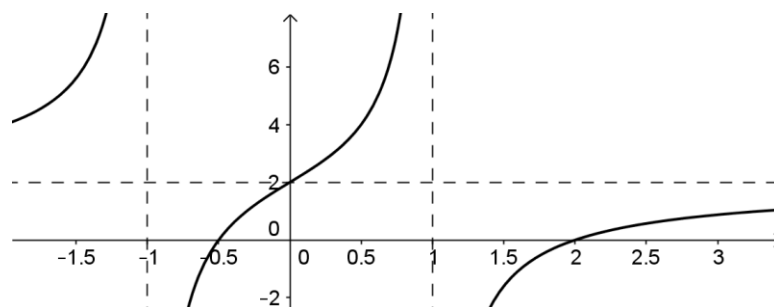
7.1 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{as } x \leq 0 \\ \cos x & \text{as } 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x & \text{as } x > 1 \end{cases}$

(a) Skryf die x -waarde neer waar f 'n sprongdikontinuiteit het en motiveer jou antwoord algebraïes. (3)

(b) Is f differensieerbaar by hierdie punt? Motifeer jou antwoord. (2)

7.2 Die funksie $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ het 'n buigpunt wat ook 'n stasionêre punt is by $x = -1$. Bepaal die waardes van a en b . (6)

7.3 Die skets toon die grafiek van $f(x) = \frac{(ax+b)(x+c)}{x^2-d}$.
 f het vertikale asimptote by $x = \pm 1$ en 'n horisontale asimptoot by $y = 2$.
 f het x -afsnitte by $-0,5$ en 2 .



Gee die waardes van a, b, c en d . (4)

[15]

VRAAG 8

Bepaal die volgende integrale:

$$8.1 \quad \int (\tan^2 x + \sec x \cdot \tan x) dx \quad (4)$$

$$8.2 \quad \int \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}} dx \quad (5)$$

$$8.3 \quad \int \frac{2}{(x-1)(2x-1)} dx \quad \text{deur } \frac{2}{(x-1)(2x-1)} \text{ eers in partiële breuke te ontbind.} \quad (8)$$

$$8.4 \quad \text{Gebruik faktor (stuksgewyse) integrasie en bepaal } \int x \cdot e^x dx \quad (6)$$

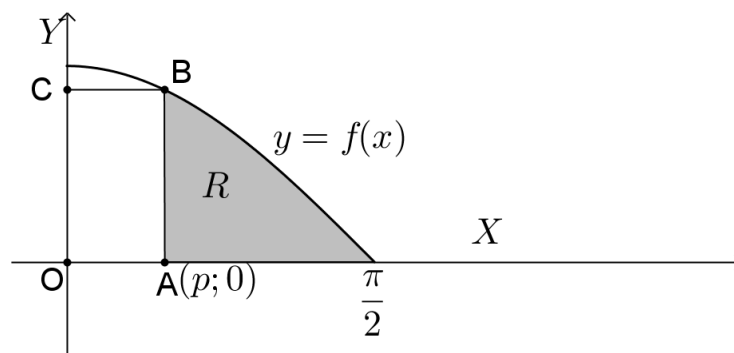
[23]**VRAAG 9**

9.1 Die skets toon die grafiek van $y = \cos x$, vir $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

'n Reghoek $OABC$ is getrek met $A(p; 0)$ en B 'n punt op die grafiek.

A en C is punte op die asse, soos aangetoon en O is die oorsprong.

Die gearseerde gebied R is ingesluit deur die grafiek en die lyne $x = p$ en $y = 0$.



(a) Bepaal die oppervlakte van R in terme van p . (4)

(b) Hierdie oppervlakte R is gelyk aan die oppervlakte van reghoek $OABC$.
Toon aan dat $p = \frac{1 - \sin p}{\cos p}$ (2)

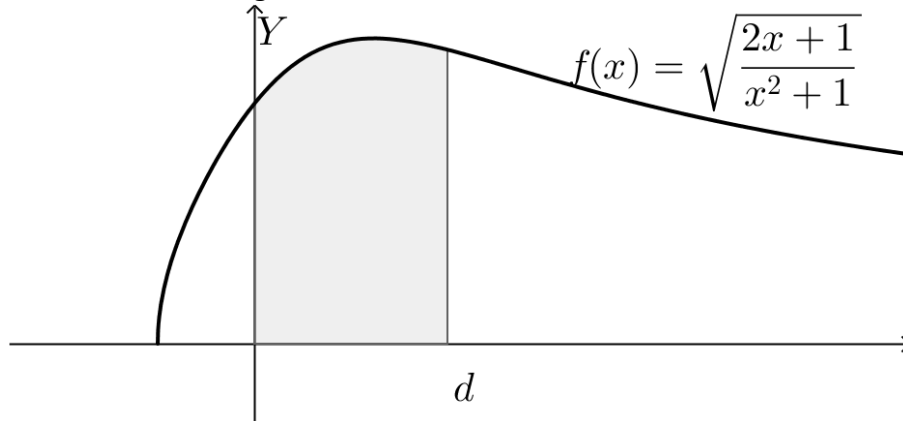
9.2 Gebruik Newton se metode om dat die nulpunt van $f(x) = \tan(2x) + x - 1$ tussen $x = 0$ en $x = 1$ te bepaal. Gebruik $x = 0,5$ as aanvangswaarde. Gee die antwoord korrek tot 5 desimale syfers en toon duidelik hoe jy Newton se metode gebruik het. (7)

[13]

VRAAG 10

10.1 Gebruik 'n Riemansom en bepaal die waarde van $\int_0^2 (2x - x^2) dx$ (12)

10.2 Die grafiek van $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x^2+1}}$ word getoon. Die gebied tussen die lyne $x = 0$ en $x = d$ is geskakeer.



Hierdie gebied roteer om die x -as. Bepaal die volume van die omwentelingsliggaam wat so ontstaan in terme van d . (10)

[22]

TOTAAL: 200