

# $\alpha$ -WISKUNDE

## Alpha Wiskunde EINDEKSAMENVRAESTEL

23 Oktober 2023

Graad 12

Tyd: 3 uur

Totaal: 200 punte

### INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Beantwoord AL 10 vrae op hierdie vraestel.
2. Skryf jou naam en ID-nommer op die voorblad van die vraestel.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n spesifieke vraag.
4. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
5. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
6. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word waar van toepassing.
7. Hierdie vraestel bestaan uit 10 vrae..
8. Vraag 1 bestaan uit 15 meervoudige keusevrae. Beantwoord dit op die antwoordblad aan die voorkant van die vraestel. **Moet nie hierdie antwoordblad losmaak nie.**
9. Toon alle noodsaaklike berekeninge duidelik aan by elke vraag. Die korrekte antwoord op sigself sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Skryf netjies en leesbaar.

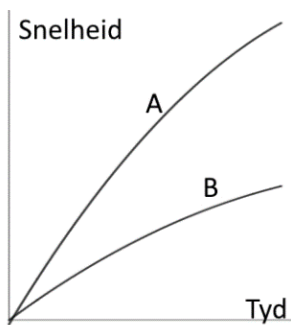


- 1.6 Gegee die polinoom vergelyking  $P(x) = x^3 + 6x^2 - 5x + 1$ . By watter een van die volgende  $x$ -waardes sal die polinoom konkaf af wees?
- (A) 1 (B) -3  
(C) -2 (D) nie een van hierdie nie
- 1.7 Die koëffisiënt van die veranderlike van die 4<sup>de</sup> term in die magreeksuitbreiding van  $\frac{1}{1-2x}$  is gelyk aan:
- (A)  $-\frac{8}{3}$  (B) 16  
(C) -8 (D) 8
- 1.8 Die oplossing van 'n absolute waarde ongelykheid is gelyk aan  $-2 < x < 6$ . Watter van die volgende ongelikhede sal hierdie oplossing gee:
- (A)  $|2 - x| < 4$  (B)  $|2 - x| > 4$   
(C)  $|4 - x| < 2$  (D)  $|4 - x| > 2$
- 1.9 Die funksie  $f(x) = \text{bgsin}(2x - 1)$  het 'n definisieversameling van:
- (A)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  (B)  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$   
(C)  $0 \leq x \leq 1$  (D)  $0 \leq x \leq \pi$
- 1.10 Indien 'n sirkel 'n radius van 5 cm het, watter van die volgende is NIE 'n moontlike waarde vir lengte van die sirkelboog nie:
- (A)  $2\pi$  cm (B) 30 cm  
(C) 25 cm (D) 32 cm
- 1.11 As  $P$  'n polinoom van graad  $n$  met  $n > 0$  is, wat sal die graad van  $\int_0^x P(t) dt$  wees?
- (A)  $n - 1$  (B)  $n$   
(C)  $n + 1$  (D) 1

1.12 Vereenvoudig:  $\frac{8\text{cis}(\frac{3\pi}{4})}{2\text{cis}(-\frac{\pi}{4})}$

- (A)  $-4i$  (B)  $4$   
 (C)  $-4$  (D)  $4i$

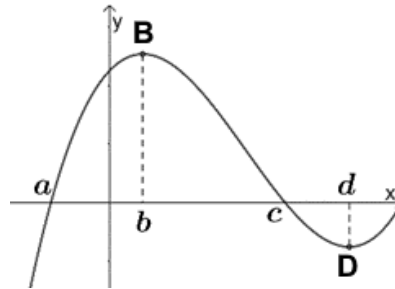
1.13 Indien  $f(t)$  'n funksie is wat die afstand van 'n voorwerp vanaf 'n punt voorstel, dan sal die afgeleide van die funksie,  $f'(t)$ , die snelheid van die voorwerp gee.



Hierdie skets stel die snelheid in km/h voor van twee motors A en B. Die motors vertrek gelyktydig vanaf dieselfde punt op 'n reguit pad. Wat sal die oppervlakte tussen die twee grafieke by  $t = 2$  uur voorstel?

- (A) Die afstand tussen die twee motors.  
 (B) Die verskil in snelheid van die twee motors.  
 (C) Die som van die snelhede van die twee motors.  
 (D) Die gesamentlike afstand afgelê deur die twee motors.

1.14 Die skets toon die grafiek van 'n funksie  $f$ . B is die lokale maksimum draaipunt en D die lokale minimum draaipunt van  $f$ . Vir watter waarde van  $x$  is dit waar dat  $f''(x) < f'(x) < f(x)$  ?



- (A)  $a$  (B)  $b$  (C)  $c$  (D)  $d$

1.15 Indien  $\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$  sal  $y = \dots$

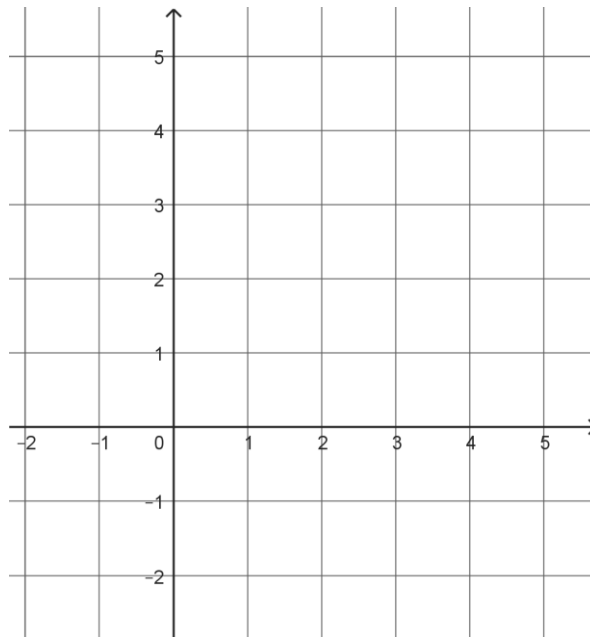
- (A)  $e^{\frac{x^2}{2} + \ln x}$  (B)  $e^{1 + \ln x}$   
 (C)  $(1 + \ln x)^2$  (D)  $e^{x \ln x}$

Beantwoord die volgende vrae **op die vraestel** op die lyne wat onderaan elke vraag voorsien is. Toon duidelik aan indien jy die addisionele skryf-spasie aan die einde van die vraestel gebruik om 'n vraag te voltooi.

**VRAAG 2****[20 PUNTE]**

2.1 Gegee die funksie:  $f(x) = e^{x-2} + 2$ .

- (a) Bepaal die waarde van  $f(2)$ . (1)
- (b) Bepaal die inverse funksie en skryf dit as  $f^{-1}(x) = \dots$  (2)
- (c) Teken, op dieselfde assentstelsel, sketsgrafieke van  $f$  en  $f^{-1}$ . Toon die waarde bereken in 2.1 (a) op beide grafieke. (6)



- (d) Beskryf die transformasies wat  $h(x) = -e^{x-2} + 4$  vanaf  $f$  sal vorm. (2)
- (e) Gebruik Newton se metode en bepaal die  $x$ -waarde van die punt waar  $h$  en  $f^{-1}(x) = \ln(x-2) + 2$  mekaar sny. Gebruik  $x = 3$  as eerste benadering en gee die antwoord korrek tot 4 desimale syfers. (5)

2.2 Gegee  $f(x) = e^{2x} - 16$  en  $g(x) = \ln(x-2)$ . Los op vir  $x$  indien  $f(g(x)) = 0$ . (4)

**VRAAG 3****[16 PUNTE]**

- 3.1 (a) Skryf  $(-1 + \sqrt{3}i)$  in poolvorm. Gebruik  $\pi$  en wortelvorm waar moontlik. (3)
- (b) Bereken die waarde van  $(-1 + \sqrt{3}i)^7$ . Doen die berekening in poolvorm en gee die antwoord in reghoekvorm. (3)
- (c) Bepaal al die waardes van  $z$  as  $z^2 = 8(-\sqrt{3} - i)$ . Laat die antwoord(e) in poolvorm. (5)
- 3.2 Die vergelyking  $2x^3 + 7x^2 + 22x - 13 = 0$  het 'n wortel  $x = -2 + 3i$ . Bepaal die vergelyking se reële wortel. (5)

**VRAAG 4****[20 PUNTE]**

4.1 Los op vir  $x$  indien  $x(|x| - 3) = -2$  (7)

4.2 Gebruik wiskundige induksie en bewys dat:  $4 + 9 + \dots + (5n - 1) = \frac{5n^2 + 3n}{2}$  (8)

4.3 Gebruik die binomiaalstelling en bereken die sesde term in die uitbreiding van:

$$\left(2x - \frac{1}{3x}\right)^{12} \quad (5)$$

**VRAAG 5****[18 PUNTE]**

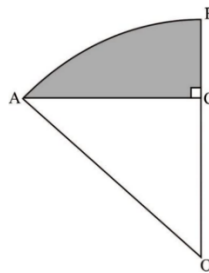
5.1 Die vektore  $i + aj + 6k$  en  $4i + 2j - 3k$  is loodreg op mekaar. Bepaal die waarde van  $a$ . (2)

5.2 Bepaal die hoek tussen die vektor  $4i + 2j - 3k$  en die  $y$ -as. (2)

5.3 a) Bepaal 'n vektor wat loodreg op die vektore  $\mathbf{a} = (1; 2; -4)$  en  $\mathbf{b} = (2; -1; -3)$  sal wees. (5)

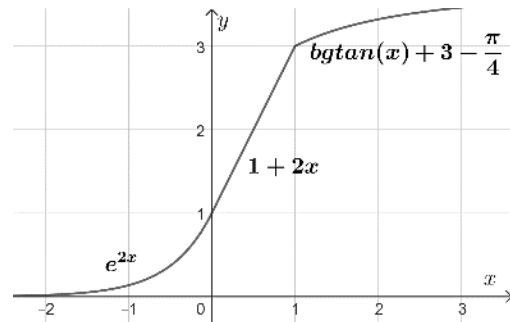
b) Bereken vervolgens die oppervlakte van die parallelogram wat deur  $\mathbf{a}$  en  $\mathbf{b}$  gevorm word. (2)

5.4 Die onderstaande skets toon 'n sektor-vormige binneplein OAB met middelpunt O en radius  $r$ . AC is loodreg op OB en  $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{6}$  radiale. Die gearseerde gebied moet geplavei word. Die oppervlakte daarvan is  $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6} m^2$ . Bereken die waarde van  $r$ . (7)

**VRAAG 6****[19 PUNTE]**

6.1 Die volgende is die vergelyking van die skets langsaan:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{as } x \leq 0 \\ 1 + 2x & \text{as } 0 < x < 1 \\ \text{bgtan}(x) + 3 - \frac{\pi}{4} & \text{as } x \geq 1 \end{cases}$$



(a) Gee die vergelyking van die afgeleide  $f'$ , as 'n stuksgewyse funksie. (3)

(b) Die funksie  $f$  is kontinuu by  $x = 0$ . Bepaal algebraïes of  $f$  differensieerbaar is by  $x = 0$ . (3)

(c) Toon algebraïes aan dat  $f$  kontinuu is by  $x = 1$ . (3)

(d) Bepaal algebraïes of  $f$  differensieerbaar is by  $x = 1$ . (3)

6.2 Differensieer die volgende funksies:

(a)  $f(x) = \frac{5^{\pi x}}{\ln(5x) + \pi}$  (4)

(b)  $g(x) = \text{cosec} \sqrt{5x}$  (3)

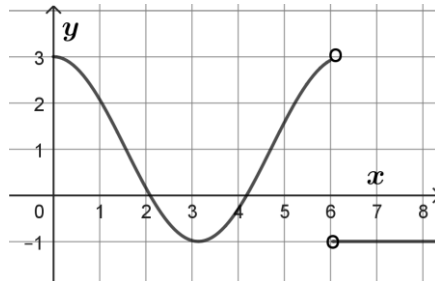
**VRAAG 7****[21 PUNTE]**

Die grafiek van die funksie  $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2}{x^2 - 1}$  het slegs twee stasionêre punte, waarvan een 'n lokale maksimum draaipunt by  $(-2,5; -7,7)$  is.

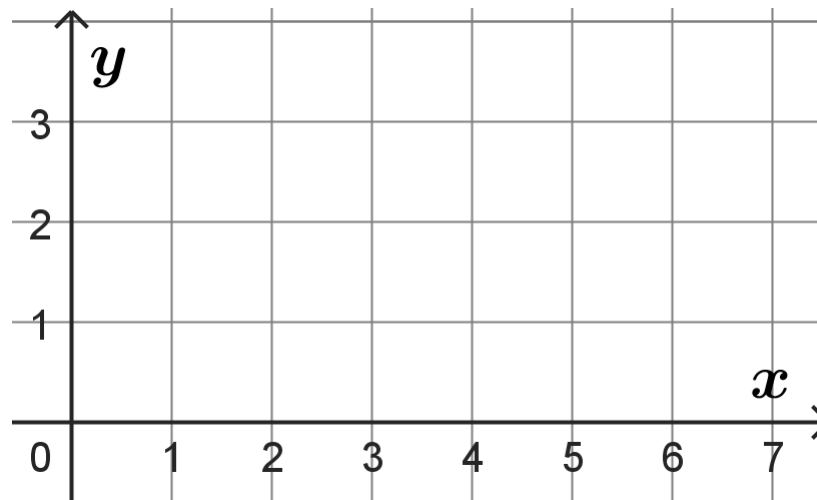
- 7.1 Bereken alle afsnitte van  $f$  met die asse. (3)
- 7.2 Bepaal die vergelykings van alle asimptote van  $f$ . (4)
- 7.3 Bepaal die punt waar  $f$  een van die asimptote sal sny. (3)
- 7.4 Bereken die koördinate van die lokale minimum draaipunt van  $f$ . (5)
- 7.5 Teken 'n netjiese sketsgrafiek van  $y = f(x)$ . Toon duidelik op jou skets die afsnitte, asimptote en die draaipunte. (6)

**VRAAG 8****[18 PUNTE]**

8.1 Die skets toon die grafiek van die **afgeleide  $f'$**  van 'n **kontinue** funksie  $f$ .



- (a) Gee die  $x$ -waardes van die stasionêre punte van  $f$ . (2)
- (b) Gee, met motivering, die aard van hierdie stasionêre punte. (4)
- (c) Gee die  $x$ -waarde van die punt van infleksie (buigpunt) van  $f$  indien  $x < 6$ . (1)
- (d) Dit word gegee dat die grafiek van  $f$  by die punt  $(0; 0)$  begin. Teken 'n moontlike sketsgrafiek van  $y = f(x)$  vir  $x \in [0; 7]$ . Aanvaar dat die grafiek nie in hierdie interval weer die  $x$ -as sny nie. *Moet nie  $f$  bereken nie.* (5)



8.2 Gebruik implisiete differensiasie en bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die funksie  $x^3 + y^3 = 6xy$  by die punt (3; 3). (6)

**VRAAG 9****[24 PUNTE]**

9.1 Gebruik 'n Riemannsom en bepaal die waarde van  $\int_0^2 (3x^2 + x) dx$  (9)

9.2 Bepaal die volgende integrale:

(a)  $\int \frac{2x-3}{(x-2)^2} dx$ , gebruik parsieële breuke. (5)

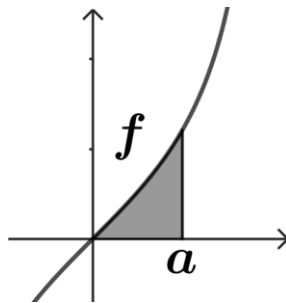
(b)  $\int (2 \sin^2 4x + 3^{\pi x}) dx$  (5)

(c)  $\int \frac{(\log x)}{x^2} dx$ , gebruik faktor- (stuksgewyse) integrasie. (5)

**VRAAG 10****[14 PUNTE]**

10.1 Die grafieke van  $y = 4 - x$  en  $y = \sqrt{4 - x}$  sny mekaar by  $x = 3$  en  $x = 4$ . Die gebied tussen die grafieke roteer om die  $x$ -as. Bereken die volume van die omwentelingsliggaam wat so ontstaan. Laat die antwoord in terme van  $\pi$ . Toon alle berekeninge. (7)

10.2 Die skets toon die grafiek van  $f(x) = \frac{2 \operatorname{bgsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$



Die gearseerde gedeelte is die deel ingesluit deur die grafiek, die  $x$ -as en die lyn  $x = a$ .

Die oppervlakte van hierdie gebied is gelyk aan  $\frac{\pi^2}{36}$ . Bereken die waarde van  $a$ . (7)

**TOTAAL: 200 PUNTE**