

α -WISKUNDE

Alpha Wiskunde EINDEKSAMENVRAESTEL

24 Oktober 2022

Graad 12

Tyd: 3 uur

Totaal: 200 punte

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Beantwoord AL 10 vrae op hierdie vraestel.
2. Skryf jou naam en ID-nommer op die voorblad van die vraestel.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n spesifieke vraag.
4. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
5. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
6. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word waar van toepassing.
7. Hierdie vraestel bestaan uit 'n voorblad, bladsye en 'n formuleblad van 3 bladsye.
8. Vraag 1 bestaan uit 10 meervoudigekeusevrae. Beantwoord dit op die antwoordblad. Hierdie antwoordblad is aan die voorkant van die vraestel. **Moet nie hierdie antwoordblad losmaak nie.**
9. Toon alle noodsaaklike berekeninge duidelik aan by elke vraag. Die korrekte antwoord op sigself sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Addisionele skryfspasie word aan die einde van die vraestel voorsien. Toon duidelik aan indien jy daarvan gebruik maak om 'n vraag te voltooi.
11. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1**[20 PUNTE]**

- Beantwoord hierdie vraag **op die antwoordblad**, wat voor aangeheg is, deur telkens 'n X (kruisie) op A, B, C of D te maak. Hierdie vrae tel 2 punte elk.
- Moet asb. **NIE** hierdie bladsy van die vraestel losmaak nie.

1.1 Wanneer daar getoets word of 'n funksie f kontinu is in die punt $x = a$ en daar word gevind dat $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, dan

- (A) bestaan daar 'n sprong diskontinuiteit by $x = a$.
 (B) bestaan daar 'n verwyderbare diskontinuiteit by $x = a$.
 (C) is die funksie differensieerbaar in die punt $x = a$.
 (D) is die funksie kontinu in die punt $x = a$.

1.2 Die binomiale uitbreiding van $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$ het 'n term px^3 . Watter waarde moet in die binomiaal formule vir r gebruik word om die waarde van p te bepaal?

- (A) 6 (B) 7
 (C) 8 (D) 9

1.3 Wat stel $f(x_i)$ in die volgende formule vir 'n Riemann-som voor?

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

- (A) Breedte van die i -de reghoek (B) Aantal reghoeke
 (C) Die i -de reghoek (D) Hoogte van die i -de reghoek

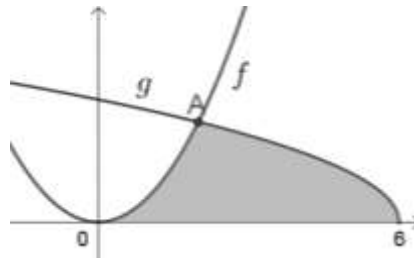
1.4 Watter stelling is altyd waar:

- (A) Indien die gradiënte van raaklyne aan 'n grafiek afneem wanneer x toeneem, is die grafiek konkaf op.
 (B) As $f'(x) > 0$ sal die grafiek bokant die x -as lê.
 (C) As $f'(b) = 0$ dan is daar 'n stasionêre punt by $x = b$.
 (D) As $f''(b) = 0$ dan is daar 'n buigpunt by $x = b$.

1.5 As $-\frac{2}{|x-1|} = 1$, dan is

- (A) $x = 3$ of $x = -1$ (B) daar geen oplossing nie
 (C) $x \in \mathbb{R}$ (D) $x = 1$

- 1.6 Die skets toon die grafieke van f en g wat mekaar by die punt $A(2; 2)$ sny. Die onderskeidelike x -afsnitte van f en g is $(0; 0)$ en $(6; 0)$.



Watter uitdrukking kan gebruik word om die oppervlakte van die gearseerde gedeelte te bepaal?

- (A) $\int_0^6 (f + g) dx$ (B) $\int_0^6 g dx$
 (C) $\int_0^6 f dx - \int_2^6 g dx$ (D) $\int_0^2 f dx + \int_2^6 g dx$

1.7 $\int_0^a \sin^2 2x dx$

- (A) $\frac{\sin^3 2a}{6}$ (B) $\frac{a}{2} - \cos 2a$
 (C) $\frac{a}{2} - \frac{\sin 4a}{8}$ (D) $\frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4}$

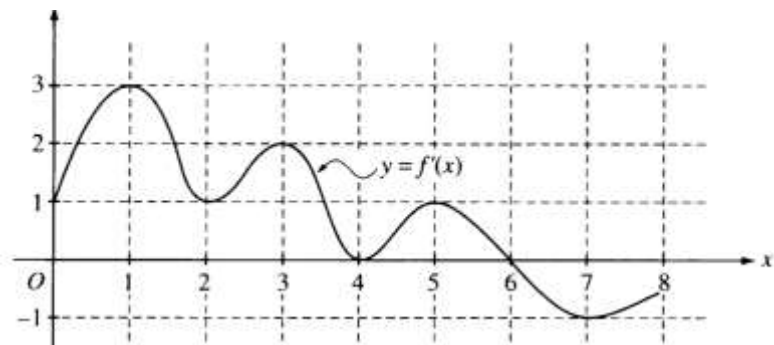
- 1.8 Die inverse van $f(x) = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$ sal gedefinieer wees indien f se definisiewersameling beperk word tot $x \in$

- (A) $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ (B) $(-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8})$
 (C) $(-\infty; \frac{3\pi}{8})$ (D) $(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$

- 1.9 As $e^y = \sin x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, dan is $\frac{dy}{dx} =$

- (A) $\frac{1}{\tan x}$ (B) $\frac{-1}{\tan x}$
 (C) $\tan x$ (D) $-\tan x$

- 1.10 Die skets toon die grafiek van $y = f'(x)$, die afgeleide van f . Die punt $(3; 5)$ lê op die grafiek van f . Die vergelyking van die raaklyn aan f by die punt $(3; 5)$ is:



- (A) $y = 2$ (B) $y = 3x - 4$
 (C) $y = 2x - 1$ (D) $y = 2x + 4$

Beantwoord die volgende vrae **op die vraestel** op die lyne wat onderaan elke vraag voorsien is. Toon duidelik aan indien jy die addisionele skryf-spasie aan die einde van die vraestel gebruik om 'n vraag te voltooi.

VRAAG 2**[20 PUNTE]**

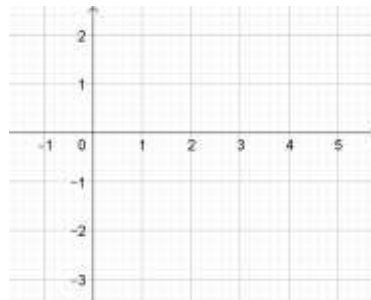
2.1 Die wêreld-populasie kan tans bepaal word met die formule

$P = 6,9(1,011)^t$, waar P die populasie in biljoene en t die aantal jaar na 2011 is.

- (a) Bepaal die grootte van die populasie in 2050 in biljoene. (3)
- (b) In watter jaar sal die populasie dubbel so groot as in 2011 wees? (4)
- (c) Bepaal die tempo waarteen die populasie in 2022 groei. Gee die antwoord korrek tot die naaste miljoen per jaar. (Aanvaar 1 biljoen = 10^9) (5)

2.2 Gegee $f(x) = \ln(x + 1) - 1$.

- (a) Bepaal die afsnitte van die grafiek van f met die asse. (4)
- (b) Skets 'n grafiek van die funksie op die volgende assestelsel. Toon duidelik die asimptoot en die afsnitte met die asse. (4)

**VRAAG 3****[23 PUNTE]**

3.1 Los op vir x : $|4x - 12| = -6x + 6$ (6)

3.2 (a) Ontbind $x^4 - 4$ volledig in $\mathbf{C[x]}$. (4)

(b) Die vergelyking $2x^5 - 13x^4 + 30x^3 - 36x^2 + 20x - 4 = 0$ het twee irrasionale wortels, twee nie-reële wortels en een rasionale wortel.

As $1 + i$ en $2 - \sqrt{2}$ twee van die wortels is, bereken die rasionale wortel. (8)

3.3 Gee die eerste 4 vereenvoudigde terme van die volgende magreeks: $\sqrt[3]{1 - 3x}$. (5)

VRAAG 4**[20 PUNTE]**

4.1 Gebruik wiskundige induksie en bewys dat (10)

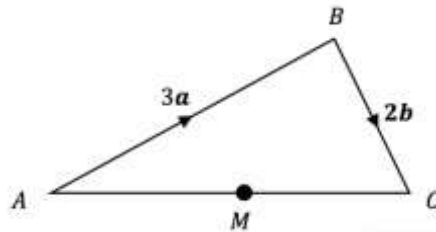
$$\sum_{p=1}^n (3p - 2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 - 3n - 1)$$

- 4.2 Bereken die waarde van $(-\sqrt{3} + i)^8$. Gebruik de Moivre se stelling en doen die bewerking in poolvorm. Die antwoord moet in reghoekige vorm gegee word. Alle stappe moet in terme van π en wortelvorm geskryf word waar nodig. (7)
- 4.3 Toon aan hoe jy Cramer se reël sal gebruik om vir x op te los in die volgende stelsel vergelykings. Moenie die determinante bereken nie, toon slegs aan hoe x bereken kan word deur verwysing na die toepaslike matrikse. (3)

$$\begin{aligned} 5x + 2y - z &= 7 \\ y - 4z &= 9 \\ 9x + \quad 4z &= 2 \end{aligned}$$

VRAAG 5**[18 PUNTE]**

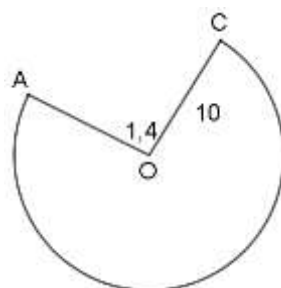
- 5.1 Die skets toon driehoek ABC met vektore $\mathbf{AB} = 3\mathbf{a}$ en $\mathbf{BC} = 2\mathbf{b}$. Die punt M is die middelpunt van AC . Bepaal 'n uitdrukking vir vektor \mathbf{AM} in terme van \mathbf{a} en \mathbf{b} . (3)



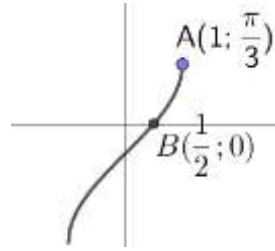
- 5.2 $D(2; -1; 4)$, $E(-1; 0; 2)$ en $F(4; 5; -1)$ is drie punte in 'n drie-dimensionele ruimte.
- (a) Bepaal vektore $\mathbf{u} = \mathbf{DE}$ en $\mathbf{v} = \mathbf{EF}$ in die vorm $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. (2)
- (b) Gebruik die puntproduk en bepaal die hoek tussen \mathbf{u} en \mathbf{v} . (6)
- (c) Gebruik die kruisproduk en bepaal die oppervlakte van die parallelogram wat deur hierdie twee vektore as sye gevorm word. (7)

VRAAG 6**[23 PUNTE]**

- 6.1 'n Vertikale graansilo is op die hoek van 'n boer se stoor opgerig met die vloerplan langsaa as basis. Die amper $\frac{3}{4}$ -sirkel het 'n radius van 10 m, $\widehat{AOC} = 1,4$ radiale en die silo is 20 m hoog. Die silo is 80% vol. Graan weeg 760 kg/m^3 .
Bereken hoeveel kg graan die silo bevat. (4)



- 6.2 Die skets toon die grafiek van $f(x) = a \cdot b \cos(x) + p$. Die punte $A(1; \frac{\pi}{3})$ en $B(\frac{1}{2}; 0)$ lê op die grafiek. Bereken die waardes van a en p . (4)



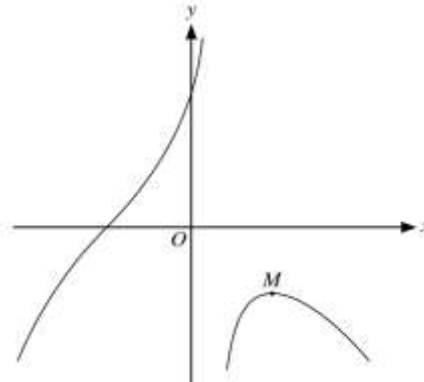
- 6.3 $g(x) = \begin{cases} bx - 8 & \text{as } x \leq b \\ 2b & \text{as } b < x \leq 1 \\ -4(x - 1)^2 + c & \text{as } x > 1 \end{cases}$
- (a) Die funksie g is kontinu vir alle $x \in \mathbb{R}$. Bereken die waardes van b en c . (5)
- (b) Motiveer algebraïes of g differensieerbaar is by $x = 1$. (4)
- 6.4 Indien $f(x) = (\ln x)^2 + x$ bepaal die x waarde van die punt op f waar die raaklyn aan f 'n maksimum gradiënt sal hê. (6)

VRAAG 7**[20 PUNTE]**

- 7.1 Differensieer die volgende funksies soos gevra:
- (a) Bepaal $\frac{dy}{dx}$ indien $y = e^{\tan 3x} - \log(3x)$. (4)
- (b) $D_x[\mathbf{bgsin}(\sqrt{1 - x^2})]$ en vereenvoudig die antwoord indien $x > 0$. (5)
- (c) Bepaal $f'(x)$ indien $f(x) = \mathbf{sec}(\cos x)$. (3)
- 7.2 Bepaal die vergelyking van die normaal aan die gegewe funksie by die punt (3; 1). Gebruik implisiete differensiasie.
(Die normaal is loodreg op die raaklyn by die punt.)
- $$x^2 \ln y + 2x + 5y = 11 \quad (8)$$

VRAAG 8**[20 PUNTE]**

8.1 Die skets toon die grafiek van $y = \frac{x^3+8}{2-5x}$:



- (a) Toon aan dat die x -waarde van die draaipunt M met die vergelyking $5x^3 - 3x^2 - 20 = 0$ bereken kan word. (4)
- (b) Gebruik Newton se metode en bereken hierdie x -waarde, korrek tot drie desimale syfers. Gebruik $x = 2$ as eerste benadering. Toon duidelik hoe jy Newton se metode gebruik. (4)

8.2 Die volgende inligting is beskikbaar oor 'n kontinue funksie $y = h(x)$ van graad 4.

$$h(0) = -3 \text{ en } h(3) = 0$$

$$h'(0) = 0 \text{ en } h'(3) = 0$$

$$h''(0) = 0; \text{ en } h''(3) = -4$$

- (a) Gee die funksie se afsnit(te) met die x -as. (1)
- (b) Gee die x -waardes waar die funksie stasionêre punte het. Sê ook **met redes** watter tipe stasionêre punt elkeen is. (6)
- 8.3 Noem die tipe asimptote wat f sal hê en bepaal die asimptote se vergelykings indien: $f(x) = \frac{(x-2)(x^2+x-1)}{x^2-4}$. (5)

VRAAG 9**[20 PUNTE]**

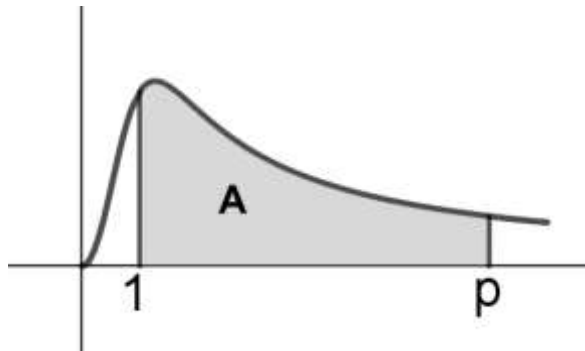
- 9.1 Gebruik 'n Riemannsom en bepaal $\int_0^3 (-x^2 + 1) dx$. (9)
- 9.2 Bepaal $\int (\sin(5x) \times \cos(2x)) dx$. (4)
- 9.3 Gebruik partiële breuke en bepaal $\int \frac{x+1}{(x-2)^2} dx$. (7)

VRAAG 10**[16 PUNTE]**

10.1 Die grafiek van $y = \sqrt{x} \cdot e^x$ roteer om die x -as. Bepaal die volume van die omwentelingsliggaam wat so ontstaan tussen die lyne $x = 0$ en $x = 2$. Gee die antwoord in terme van e en π .

Toon alle stappe van die stuksgewyse integrasie. (8)

10.2



Die skets toon die grafiek $f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}$ vir $x \geq 0$. Die gearseerde gebied A is die gebied ingesluit deur die grafiek, die x -as en die lyne $x = 1$ en $x = p$.

Die waarde van p is gelyk aan $\sqrt[3]{a \cdot e^c + b}$ indien die oppervlakte van A gelyk is aan 2. Bepaal die waardes van a , b en c .

(8)

TOTAAL: 200 PUNTE