

# $\alpha$ -WISKUNDE

## Alpha-wiskunde REKORDVRAESTEL

September 2022

Graad 12

Tyd: 3 uur

Totaal: 200 punte

### INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Beantwoord AL nege vrae op hierdie vraestel.
2. Skryf jou naam op die antwoordblad van die vraestel.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n spesifieke vraag.
4. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot **twee desimale syfers** afgerond word.
5. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
6. **Alle hoeke word in radiale gegee.** Antwoorde moet in radiale gegee word waar van toepassing.
7. Hierdie vraestel bestaan uit sewe bladsye en 'n antwoordblad van drie bladsye. Die formuleblad bevat drie bladsye.
8. Vraag 1 bestaan uit 10 meervoudigekeusevrae. Beantwoord dit op die antwoordblad.
9. Toon alle noodsaaklike berekeninge duidelik aan by elke vraag. Die korrekte antwoord op sigself sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Skryf netjies en leesbaar.

**VRAAG 1 [20 PUNTE]**

- Beantwoord hierdie vraag **op die antwoordblad**, wat voor aangeheg is, deur telkens 'n X (kruisie) op A, B, C of D te maak.
- Hierdie vrae tel 2 punte elk.

1.1 Los op vir  $x$  indien  $2\ln(3x + 1) = 5$

- (A)  $x = 6,36$  (B)  $x = 4,39$   
 (C)  $x = 3,73$  (D)  $x = 11,18$

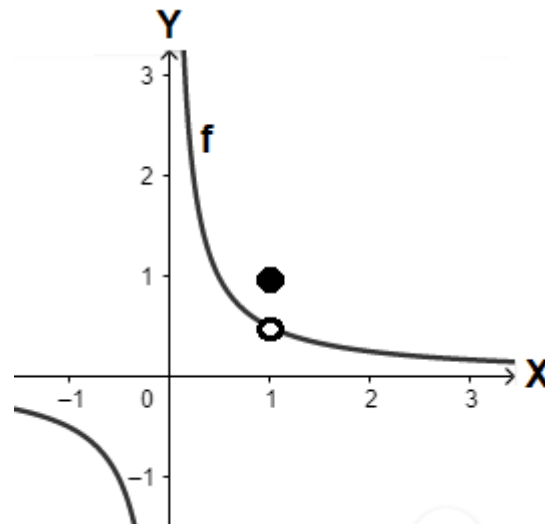
1.2 Los op vir  $x$ :  $|x| = 2x + 1$

- (A)  $x = -\frac{1}{3}$  (B)  $x = -\frac{1}{3}$  of  $x = -1$   
 (C)  $x = -1$  (D) Geen oplossing nie

1.3 Die tweede term in die binomiaal uitbreiding van  $\frac{1}{2-x}$  is

- (A)  $x$  (B)  $\frac{x}{2}$   
 (C)  $\frac{-x}{2}$  (D)  $\frac{x}{4}$

1.4 Die skets toon die funksie van  $f$ . Watter tipe diskontinuiteit kom voor by  $x = 1$ ?

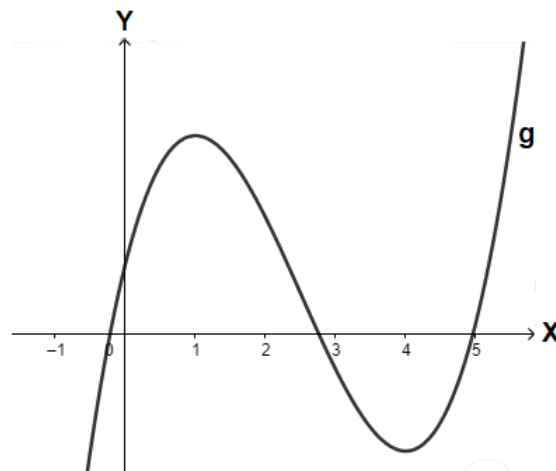


- (A) Asimptotiese diskontinuiteit (B) Verwyderbare diskontinuiteit  
 (C) Sprong diskontinuiteit (D) Nie een van bogenoemde nie

1.5 Gegee:  $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$  Watter van die volgende stellings is waar?

- (A)  $f$  het 'n vertikale asimptoot by  $x = 1$
- (B)  $f$  is ongedefinieerd by  $x = 1$
- (C)  $f$  is kontinu by  $x = 1$
- (D) Nie een van bogenoemde nie

1.6 Die skets toon die grafiek van  $g$ . Die funksie het 'n  $x$ -afsnit tussen  $x = 2$  en  $x = 3$  en stasionêre punte by  $x = 1$  en  $x = 4$ . Indien die Newton-Rhapon-metode gebruik word, watter een van die volgende waardes van  $x$  sou die beste eerste benadering wees om hierdie snypunt (tussen  $x = 2$  en  $x = 3$ ) te bereken?



- (A)  $x = 4$
- (B)  $x = 5$
- (C)  $x = 3,9$
- (D)  $x = 2,5$

1.7 Bepaal die horisontale asimptoot van  $h(x) = \frac{2x^3+3x^2+x-7}{5x^3+x^2+3x-2}$

- (A)  $y = \frac{7}{2}$
- (B)  $y = 0$
- (C)  $y = \frac{2}{5}$
- (D)  $y = 3$

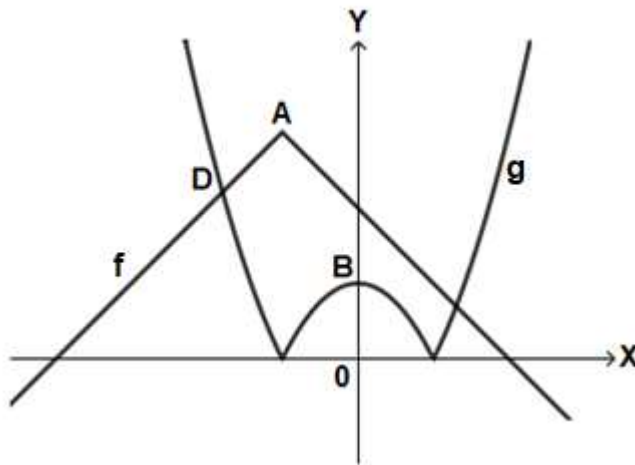
1.8 Watter integrasie-metode sal gebruik word om  $\int \frac{x^2-4x+2}{(2x-1)(-x+1)^2} dx$  te bepaal?

- (A) Integrasie m.b.v partiële breuke
- (B) Faktorintegrasie
- (C) Integrasie m.b.v substitusie
- (D) Geen oplossing



**VRAAG 3 [26 PUNTE]**

3.1 Die skets toon die grafieke van  $f(x) = -|x + 1| + 4$  en  $g(x) = |x^2 - 1|$



- (a) Bepaal die koördinate van A, die knakpunt van  $f$ . (2)
- (b) Bepaal die koördinate van B, die  $y$ -afsnit van  $g$ . (1)
- (c) Bepaal die koördinate van D, die snypunt van  $f$  en  $g$ . (5)
- (d) Bepaal algebraïes die waarde(s) van  $x$  waarvoor  $f(x) < 1$ . (5)

3.2 Skep 'n polinoom,  $g$ , met die volgende eienskappe:

- Die funksie bevat 'n nulpunt  $x = 1 + i$
- $g(-1) = 0$  (5)

3.3 Die konstante in die binomiaaluitbreiding van  $\left(x + \frac{a}{x^3}\right)^8$  is 7.

Bepaal die waarde(s) van  $a$ . (8)

**VRAAG 4 [24 PUNTE]**

4.1 Gebruik wiskundige induksie en bewys dat die volgende bewering waar is vir alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$1(2) + 2(5) + 3(8) + \dots + n(3n - 1) = n^2(n + 1) \quad (10)$$

4.2 Gegee vektore  $\mathbf{t} = (a; -1; -2)$  en  $\mathbf{p} = (2; -a; 3)$

- (a) Die vektore  $\mathbf{t}$  en  $\mathbf{p}$  is loodreg op mekaar. Toon aan dat  $a = 2$ . (4)
- (b) Bepaal twee vektore wat loodreg is op beide  $\mathbf{t}$  en  $\mathbf{p}$ . (4)
- (c) Bepaal die oppervlakte van die parallelogram wat gevorm word met vektore  $\mathbf{t}$  en  $\mathbf{p}$  as aangrensende sye. (2)
- (d) Bepaal die grootte van die hoek wat vektor  $\mathbf{p}$  met die  $z$ -as maak. (4)

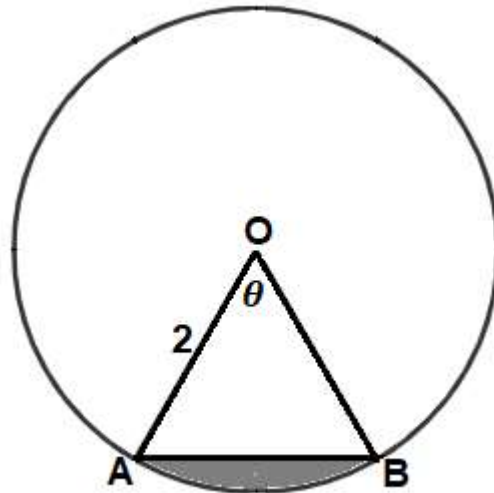
**VRAAG 5 [21 PUNTE]**

5.1 Gegee  $f(x) = b\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{4}$

Maak 'n duidelike skets van  $f$  op die antwoordblad. Toon duidelik alle afsnitte met die asse, en die begin- en eindpunte van die funksie, indien van toepassing, aan.

(7)

5.2 Die diagram toon 'n sirkel met middelpunt  $O$  en radius van 2cm. Punte  $A$  en  $B$  lê op die sirkel.



- (a) Bereken die oppervlakte van die **klein** sektor  $AOB$ , in terme van  $\theta$ . (2)
- (b) Bereken die oppervlakte van die **groot** sektor  $AOB$ , in terme van  $\theta$ . (2)
- (c) Toon aan dat  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , indien die oppervlakte van die **gróót** sektor  $AOB$  **vyf** keer so groot is as die oppervlakte van die **klein** sektor  $AOB$ . (2)
- (d) Bepaal die **omtrek** van die ingekleurde segment.  
(Gee jou antwoord i.t.v. $\pi$ .) (3)

5.3 Gebruik die Newton-Rhapson-metode en bepaal 'n benaderde snypunt van  $f(x) = \tan x$  en  $g(x) = b\cos x$ . Gebruik  $x = 0,5$  as eerste benadering en gee jou antwoord afgerond tot vier desimale plekke. Toon duidelik aan hoe jy die metode gebruik.

(5)

**VRAAG 6 [19 PUNTE]**

6.1 Beskou die funksie  $g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{as } x \leq a \\ x - 4 & \text{as } x > a \end{cases}$

- (a) Bepaal die waarde(s) van  $a$  waarvoor  $g$  kontinu is. Toon alle berekenings. (4)
- (b) Indien  $a = 2$ , is  $g$  differensieerbaar by  $x = 2$ ? Motiveer jou antwoord volledig. (4)

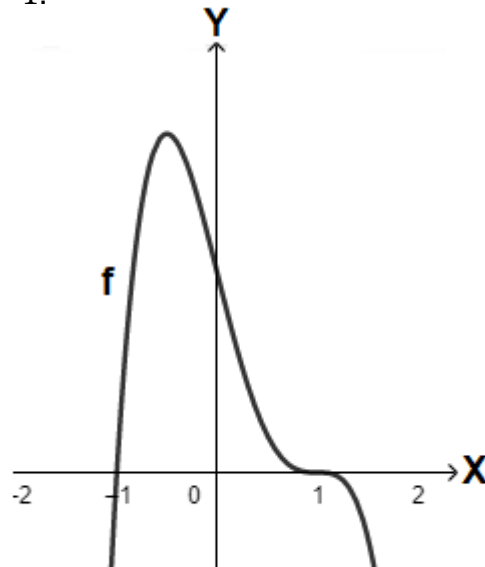
6.2 Differentieer die volgende funksies m.b.t. die veranderlike:

(a)  $p(x) = 4^{3x} + 4x^3 + \log_3(4x)$  (7)

(b)  $t(x) = [\text{bgtan}(2x)]^5$  (4)

**VRAAG 7 [21 PUNTE]**

7.1 Die skets toon die grafiek van  $f(x)$ . Die funksie het  $x$ -afsnitte by  $x = -1$  en  $x = 1$ , stasionêre punte by  $x = -\frac{1}{2}$  en  $x = 1$  en buigpunte by  $x = 0$  en  $x = 1$ .



By watter waarde(s) van  $x$  is

(a)  $f'(x) > 0$ ? Motiveer jou antwoord. (2)

(b)  $f'(x) = 0$ ? Motiveer jou antwoord. (3)

(c) Gebruik die antwoordblad en teken 'n moontlike skets van  $f''$ . (5)

7.2 (a) Gebruik implisiete differensiasie en bepaal  $\frac{dy}{dx}$  indien  $e^{xy} = \ln y + e$  (7)

(b) Bepaal die **gradiënt** van die **normaal** by die punt  $(1; 1)$ . (4)

**VRAAG 8 [19 PUNTE]**

8.1 Gebruik die antwoordblad en teken 'n grafiek van 'n rasionale funksie,  $f$ , met die volgende eienskappe. Dui alle afsnitte, draaipunte (stasionêre punte) en asimptote duidelik op jou skets aan.

- $f(-2) = 0$
- $f(2) = 4$
- $f'(2) = 0$
- $f''(2) > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$  en  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 0$  (8)

8.2 Gebruik 'n Riemannsom en bereken die waarde van  $\int_1^2 (-x^2) dx$ . (11)

**VRAAG 9 [26 PUNTE]**

9.1 Bepaal die volgende integrale:

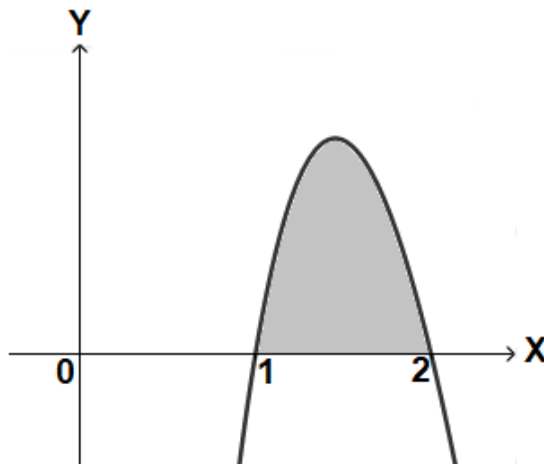
(a)  $\int 5^{3x} dx$  (3)

(b)  $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$  (5)

(c)  $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$  (2)

(d)  $\int (\sec x \cdot \tan x + \sin 2x \cdot \cos x) dx$  (5)

9.2 Die skets toon 'n gedeelte van die grafiek van  $y = (3 \ln x)(-2x + 4)$ . Gebruik faktorintegrasië en bereken die oppervlakte tussen  $x = 1$  en  $x = 2$ . Toon duidelik hoe jy faktorintegrasië gebruik. (11)



**EINDE VAN VRAESTEL**