

# $\alpha$ -WISKUNDE

## Alpha Wiskunde Rekord eksamen 2021

**Graad 12**

**Tyd: 3 uur**

**Eksaminator: Pieter van Onselen**

**Totaal: 200 punte**

**Moderator: Anna Muller**

### INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

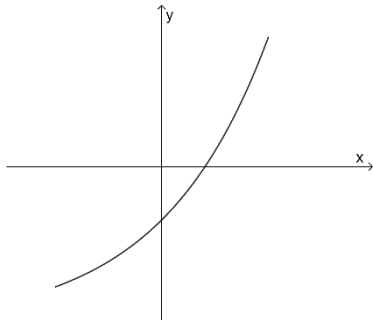
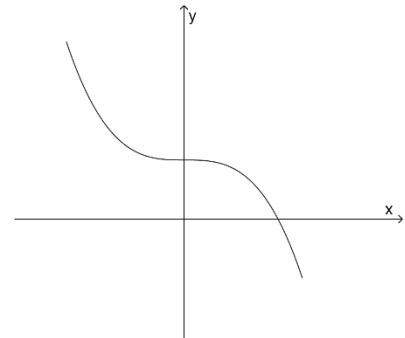
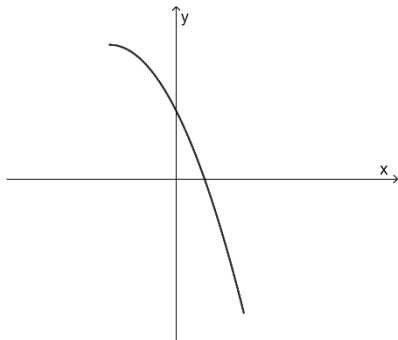
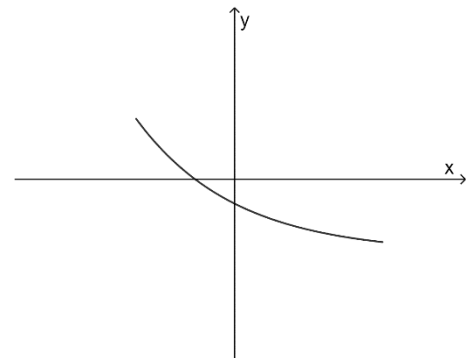
1. Hierdie vraestel bestaan uit 2 bladsye, 'n formuleblad van 3 bladsye en 'n antwoordblad van 1 bladsye.
2. Beantwoord AL 9 vrae.
3. Nommer die antwoorde soos die vrae genummer is.
4. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld.
5. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
6. Dui alle noodsaaklike berekeninge, diagramme, grafieke ensovoorts wat jy gebruik het om jou antwoorde te bepaal, duidelik aan.
7. Volpunte sal nie noodwendig aan slegs antwoorde toegeken word nie.
8. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
9. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde met hoeke moet in radiale gegee word.
10. 'n Formuleblad is aan die einde van die vraestel ingesluit.
11. Skryf netjies en leesbaar.

**Vraag 1****[20 punte]**

Hierdie vraag moet **op die antwoordblad** beantwoord word.

Elke vraag het **SLEGS** een korrekte antwoord en tel twee (2) punte. Merk die korrekte antwoord met 'n **X** op die antwoordblad.

- 1.1 As  $f$  'n funksie is sodat  $f'(x) < 0$  en  $f''(x) > 0$  vir alle waardes van  $x$ , dan kan die volgende 'n grafiek van  $y = f(x)$  voorstel:

**(A)****(B)****(C)****(D)**

- 1.2 Die inverse van  $f(x) = \cos(2x)$  sal gedefinieer wees indien  $f$  se definisieversameling beperk word tot:

**(A)**  $x \in [0; \pi]$

**(B)**  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

**(C)**  $x \in [0; 2\pi]$

**(D)**  $x \in [0; 4\pi]$

- 1.3 Los op vir  $x$  as  $|2x - 1| + 4 = 0$ .

**(A)**  $x = \frac{5}{2}$

**(B)** Geen oplossing

**(C)**  $x = -\frac{3}{2}$

**(D)**  $x = \frac{3}{2}$

- 1.4 Gegee  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ . Die afgeleide van  $f$  in die vorm  $f'(x) = \dots$
- (A)  $\sqrt{x}e^{\sqrt{x}-1}$  (B)  $\frac{e^{\sqrt{x}-0,5}}{2}$   
 (C)  $e^{\sqrt{x}}$  (D)  $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
- 1.5 Watter van die volgende stellings beskryf 'n sprong diskontinuiteit by  $x = a$ ?
- (A)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  bestaan nie. (B)  $f(a)$  bestaan nie.  
 (C)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq f(a)$  (D)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- 1.6 Bepaal  $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx =$
- (A) 1 (B) 2  
 (C) 4 (D) 6
- 1.7 Vereenvoudig  $(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \times 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$
- (A)  $-2$  (B) 1  
 (C)  $-2i$  (D)  $2i$
- 1.8 Die magreeks  $\sqrt{4-x}$  sal geldig wees indien:
- (A)  $|x| < 1$  (B)  $|x| > 1$   
 (C)  $|x| < 4$  (D)  $|x| < \frac{1}{4}$
- 1.9 Gegee  $f(x) = \log_3 x^2$ , dan is  $f'(x) =$
- (A)  $2 \log_3 x$  (B)  $\frac{1}{\ln 3(x^2)}$   
 (C)  $\frac{2}{\ln 3(x)}$  (D)  $\frac{2}{\ln 3(x^2)}$
- 1.10 Vind die horisontale asimptoot, indien daar wel een is, van  $\frac{2x^2+x}{3x^3-x^2}$ .
- (A)  $y = \frac{2}{3}$  (B)  $y = 0$   
 (C)  $y = 2$  (D) Geen horisontale asimptoot nie.

**Vraag 2****[28 punte]**

2.1 Die aantal bakterieë  $C(t)$  in 'n kultuur na  $t$  uur kan bereken word deur:

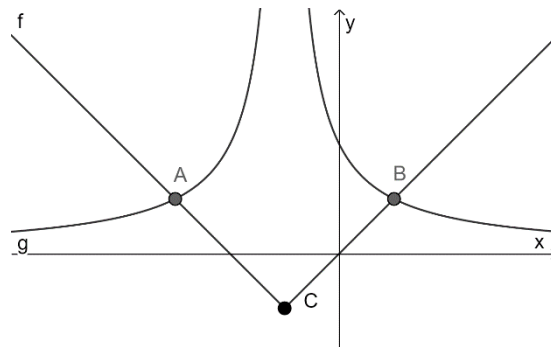
$$C(t) = 500e^{0,92t}$$

- (a) Bepaal hoeveel bakterieë van die kultuur daar aanvanklik was. (2)
- (b) Bepaal die aantal bakterieë na 6 uur. (2)
- (c) Vind die tyd wat dit sal neem vir die bakterieë om te vermeerder na  $10^5$ . (4)

2.2 Die skets hieronder toon die grafiek van  $f(x) = |x + 1| - 1$  en  $g(x) = \left| \frac{2}{x+1} \right|$ .

Die grafieke sny mekaar by  $A$  en  $B$ .

- (a) Gee die koördinate die knakpunt  $C$  van  $f$ . (2)
- (b) Bereken die  $x$ -koördinaat van punt  $A$ . (4)
- (c) Bereken die  $x$ -waarde(s) waar  $f(x) < 2$ . (3)



- 2.3 (a) Bepaal en vereenvoudig die vierde terme van  $(2x - x^2)^7$ . (4)
- (b) Bepaal die eerste drie terme van  $\sqrt{16 - x}$  en vereenvoudig. (7)

**Vraag 3****[31 punte]**3.1 'n Leerder wil met **wiskundige induksie** bewys dat

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

waar is vir alle  $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ .

(8)

Voltooi die bewys van die leerder:**STAP 1:** Beskou  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} LK &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} RK &= \left(\frac{2+1}{2(2)}\right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore LK = RK$$

Die bewering is dus waar vir  $n = 2$ .**STAP 2:** Aanvaar die bewering is waar vir  $n = k$ :

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

**STAP 3:** ...3.2 Indien  $x = \sqrt{2} + 2$  'n nulpunt is van  $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2$ .

(7)

Gebruik die **irrasionale wortelstelling** en faktoriseer  $f(x)$  volledig in  $\mathbb{R}[x]$ .3.3 Gegee  $(i - 1)^6 = p \operatorname{cis}(\beta)$ :(a) Herlei  $i - 1$  na poolvorm. (2)(b) Gebruik **De Moivre se stelling** en bepaal die waardes van  $p$  en  $\beta$ . (6)(c) Skakel die antwoord van  $(i - 1)^6$  om na reghoekvorm. (4)(d) Bepaal vervolgens die waarde van  $\frac{(i-1)^6}{4 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ . Los die antwoord in poolvorm. (4)

**Vraag 4****[20 punte]**

4.1 Gegee die stelsel vergelykings:

$$x + ay = 3$$

$$2ax + 5y = 6$$

(a) Skryf die stelsel vergelykings in matriksvorm. (3)

(b) Gebruik **Cramer se reël** en bepaal  $a$  indien  $x = -1$ . (6)4.2 Die punte  $A(3; 1; 2)$ ,  $B(2; 3; 2)$ ,  $C(1; 1; 3)$  en  $D$  is op dieselfde vlak op 'n drie-dimensionele assestelsel.(a) Bepaal die vektore  $\mathbf{AC}$  en  $\mathbf{AB}$ . (2)(b) Bepaal  $\theta$  die hoek tussen die vektore  $\mathbf{AC}$  en  $\mathbf{AB}$ . (4)(c) Bepaal die oppervlakte van die parrallogram  $ABCD$  wat deur  $\mathbf{AC}$  en  $\mathbf{AB}$  gevorm word. (5)

**Vraag 5****[20 punte]**5.1 Die funksie  $f$  word gedefinieer:

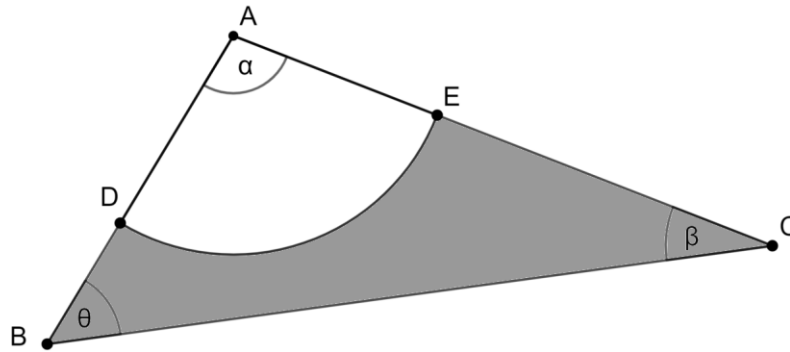
$$f(x) = \begin{cases} px + 1 & \text{as } x < p \\ 2p & \text{as } p \leq x \leq q \\ \sqrt{x+1} & \text{as } x > q \end{cases}$$

Bepaal die waarde van  $p$  en  $q$  indien  $f$  kontinu is vir alle waardes van  $x$ . (6)5.2 Gegee:  $e^y \ln(x+y) = y$ Gebruik **implisiete differensiasie** en bepaal  $\frac{dy}{dx}$ . (9)5.3 Beskou die funksies  $f(x) = \log_5(3x+2)$  en  $g(x) = e^{-x}$ .Gebruik die **Newton-Rhapson metode** en bepaal die  $x$ -koördinaat van die snypunt van die funksies  $f$  en  $g$ , korrek tot 4 desimale plekke. Gebruik  $x_0 = 0,2$  as die eerste benadering. (5)

**Vraag 6****[19 punte]**

6.1 Die skets toon 'n driehoek  $ABC$  het sy  $AC = 20 \text{ cm}$  en die hoek  $\beta = \frac{\pi}{6}$  radiale.

Die sektor  $ADE$  het 'n radius  $AE = 10 \text{ cm}$ , booglengte  $DE$  is  $\frac{50}{9}\pi$  en hoek  $D\hat{A}E = \alpha$ .



- (a) Bereken hoek  $\alpha$ . (2)
- (b) Bereken die lengte van  $AB$ . (5)
- (c) Bereken die oppervlakte van driehoek  $ABC$ . (3)
- (d) Bereken die oppervlakte van die ingekleurde figuur  $BDEC$ . (4)

6.2 Skets die grafiek van  $y = b \sin(2x) - \frac{\pi}{3}$ .

Toon duidelik alle afsnitte met die asse op jou grafiek aan. (5)

**Vraag 7****[13 punte]**

Differensieer die volgende soos gevra:

7.1.  $f(x) = 3^{\tan(\frac{x}{2})}$ , bepaal  $f'(x)$ . (4)

7.2  $\frac{dy}{dx}$  as  $y = \sec(e^{2x}) \times \ln(5x)^2$  (4)

7.3  $D_x \left[ \frac{bg \sin(\cos^2 x)}{\sqrt[3]{2x}} \right]$  (5)

**Vraag 8****[34]**

8.1 Bepaal die volgende integrale.

(a)  $\int (\tan^2 2x + \sin^2 x) dx$  (5)

(b)  $\int \frac{bgsin4x}{\sqrt{1-16x^2}} dx$  (5)

(c)  $\int \left(\frac{e}{x \ln 3}\right) dx$  (2)

8.2 Gegee  $f(x) = \frac{4x^2 - 2x - 7}{(x^2 + 1)(x - 2)}$ .(a) Ontbind  $f(x)$  in **parsiële breuke**. (7)(b) Bepaal vervolgens  $\int f(x) dx$ . (5)8.3 Gebruik **faktorintegrasië** en bepaal  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ . (7)8.4  $f(x) = \int_a^b x^2 dx$  kan bereken word met 'n **Riemansom**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$ .Indien  $\Delta x_i = \frac{2}{n}$  en  $x_i = 1 + \frac{2}{n}i$  wat sal die waardes van  $a$  en  $b$  wees. (3)

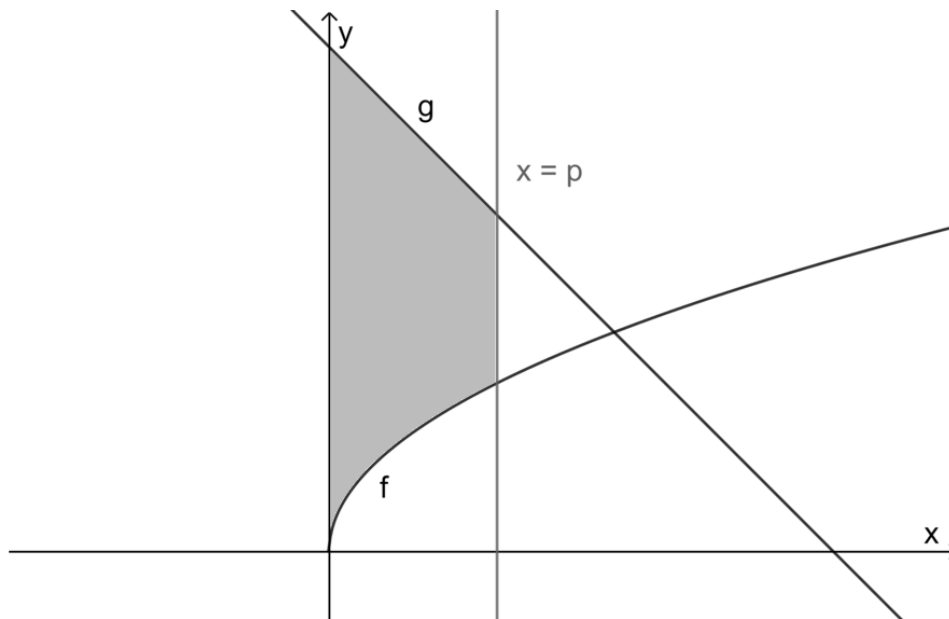
**Vraag 9****[15 punte]**

9.1 Gegee die funksie  $f(x) = \left(\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}\right)$ .

(a) Bepaal die waardes van die  $x$ -afsnit(te) en  $y$ -afsnit(te). (3)

(b) Bepaal die vergelykings van die asimptote. (4)

9.2 Die skets toon die grafiek van  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $g(x) = 3 - x$ .



Die omwentelingsvolume van die oppervlakte tussen die funksies  $f(x)$  en  $g(x)$  tussen die lyn  $x = p$  en  $x = 0$  is  $\frac{20\pi}{3}$ .

Bepaal die waarde(s) van  $p$ , as  $p > 1$  en  $p \in \mathbb{Z}$ . (8)

**- EINDE VAN DIE VRAESTEL -**

**ANTWOORDBLAD**  
**Alpha Wiskunde Graad 12**  
**Rekord eksamen 2021**

Naam en Van: \_\_\_\_\_

<b>Vraag Totaal</b>	<b>1</b> [20]	<b>2</b> [28]	<b>3</b> [31]	<b>4</b> [20]	<b>5</b> [20]	<b>6</b> [19]	<b>7</b> [13]	<b>8</b> [34]	<b>9</b> [15]	<b>TOTAAL</b> <b>200</b>
<b>Leerder punt</b>										

**Vraag 1**

<b>1.1</b>	A	B	C	D
<b>1.2</b>	A	B	C	D
<b>1.3</b>	A	B	C	D
<b>1.4</b>	A	B	C	D
<b>1.5</b>	A	B	C	D
<b>1.6</b>	A	B	C	D
<b>1.7</b>	A	B	C	D
<b>1.8</b>	A	B	C	D
<b>1.9</b>	A	B	C	D
<b>1.10</b>	A	B	C	D

**DIAGRAM 1**

