α-WISKUNDE

Alpha Wiskunde
REKORD EKSAMENVRAESTEL

September 2020 **Tyd: 3 ure**

Graad 12 **Totaal: 200 punte**

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Beantwoord AL 10 vrae op hierdie vraestel.
2. Skryf jou naam en ID-nommer op die voorblad van die vraestel.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by ŉ spesifieke vraag.
4. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
5. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
6. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word waar van toepassing.
7. Hierdie vraestel bestaan uit ŉ vraestel van 8 bladsye, ŉ formuleblad van 3 bladsye en ‘n antwoordblad van 2 bladsye.
8. Vraag 1 bestaan uit 10 meervoudigekeusevrae. Beantwoord dit op die antwoordblad.
9. Toon alle noodsaaklike berekeninge duidelik aan by elke vraag. Die korrekte antwoord op sigself sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Addisionele skryfspasie word aan die einde van die vraestel voorsien. Toon duidelik aan indien jy daarvan gebruik maak om ‘n vraag te voltooi.
11. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1 [20 PUNTE]

- Beantwoord hierdie vraag **op die antwoordblad,** wat voor aangeheg is, deur telkens
  ’n X (kruisie) op A, B, C of D te maak.
- Elke vraag tel 2 punte.

1.1 As $f(x) = \begin{cases} 2x & as \quad x \leq 1 \\ \log x & as \quad x > 1 \end{cases}$, dan

(A) is f kontinu in die punt $x = 1$

(B) is f differensieerbaar in die punt $x = 1$

(C) bestaan daar ’n verwyderbare diskontnuïteit by $x = 1$

(D) bestaan daar ’n sprong diskontnuïteit by $x = 1$

1.2 Gegee $f(x) = cotx$. As $f'(x) = -2$, dan is $x =$

(A) $\frac{\pi}{6}$ **(B)** $\frac{\pi}{4}$ **(C)** $\frac{\pi}{3}$ **(D)** $\frac{\pi}{2}$

1.3 Die grafiek van $y = |4 - 2x| - 2$ het ’n knakpunt by

(A) $(-4; -2)$ **(B)** $(4; -2)$

(C) $(2; -2)$ **(D)** $(-2; -2)$

1.4 Watter van die volgende uitdrukkings se magreeks-uitbreidings sal konvergeer as $|x| < 2$?

(A) $\frac{1}{2+x}$ **(B)** $\frac{1}{1+2x}$

(C) $\frac{1}{1-2x}$ **(D)** $\frac{1}{2x-2}$

1.5 As $\cos x = e^y$, dan is $\frac{dy}{dx} =$

(A) $\frac{1}{\tan x}$ **(B)** $-\frac{1}{\tan x}$

(C) $\tan x$ **(D)** $-\tan x$

1.6 Die vergelyking van die raaklyn aan $y = \mathrm{bgtan}\left(\frac{x}{2}\right)$ by die oorsprong is

(A) $y = \frac{x}{2}$ **(B)** $y = x$

(C) $x = 0$ **(D)** $y = 0$

1.7 Die maksimumwaarde van $\frac{lnx}{x}$ is by $x =$

(A) 1 **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $e^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ **(D)** e

1.8 $\int \cos(2x+3)\,dx =$

(A) $-\frac{1}{2}\sin(2x+3)+k$ **(B)** $\frac{1}{2}\sin(2x+3)+k$

(C) $-\frac{3}{2}\sin(2x+3)+k$ **(D)** $\frac{3}{2}\sin(2x+3)+k$

1.9 As $\frac{dy}{dx} = 4x$ en $y = 4$ as $x = 0$, dan is $y =$

(A) $4x+4$ **(B)** $4+x^2$

(C) $2x^2+4$ **(D)** $4+4x^2$

1.10 $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x$. As $g(2) = 4$ en $g'(2) = 3$, bepaal $f'(4)$

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 5 **(D)** 6

Beantwoord die volgende vrae **op die antwoordblaaie**.

VRAAG 2 [23 PUNTE]

2.1 Die populasie sardientjies kan bepaal word met die vergelyking

$$P(t) = 20 - (2 \times 4^{0,1t})$$

waar P(t) die populasie in miljoen is na t weke.

(a) Bepaal die aanvanklike populasie, as $t = 0$. (2)

(b) Bereken na hoeveel weke daar 10 miljoen sardientjies behoort te wees. (4)

(c) Bereken die tempo van verandering van sardientjies tydens die 10'de week en sê of die populasie verminder of vermeerder. (5)

2.2 Los op vir x: $|x - 5| = 2x - 1$. (6)

2.3 Bepaal die sesde term in die binomiaal uitbreiding van $\left(-\frac{x}{3} + \frac{2}{x^2}\right)^9$. (6)

VRAAG 3 [20 PUNTE]

3.1 Die vergelyking $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 16x - 16 = 0$ het 'n wortel $x = 1 + i$. Los die vergelyking volledig op in $\mathbb{C}$. (8)

3.2 (a) Gegee $(-1 + i)^6$. Gebruik de Moivre se stelling. Gebruik wortelvorm en π indien nodig en toon aan dat hierdie uitdrukking altyd **nie-reëel** is. (6)

(b) Vereenvoudig:

$$\frac{(-1 + i)^6}{\sqrt{3} - i}$$

Werk in pool- of eksponensiële vorm met hoeke in terme van π. Gee die antwoord in reghoekvorm. (6)

VRAAG 4 [15 PUNTE]

4.1 Gegee $\boldsymbol{u} = 2i + aj - 2k$ en $\boldsymbol{v} = 4i - 2j + k$.

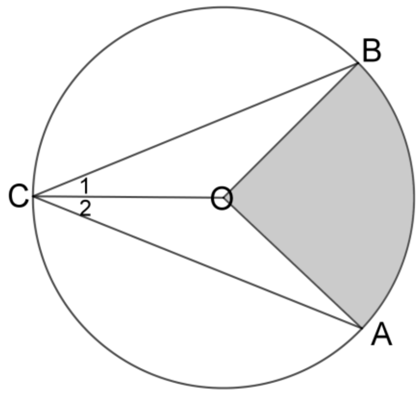
(a) Bepaal die waarde(s) van a indien die grootte van $\boldsymbol{u}$ gelyk is aan 3. (4)

(b) Indien $a = -1$, bepaal grootte van die hoek tussen $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{v}$. (5)

4.2 Gegee $\boldsymbol{a} = (-2; -1; 4)$ en $\boldsymbol{b} = (0; -5; 2)$. Bepaal 'n vektor wat loodreg op hierdie twee vektore is. (6)

VRAAG 5 [19 PUNTE]

5.1 Die skets toon sirkel CAB met middelpunt O en radius 5 eenhede. Radiï OB, OA en OC is getrek en koorde AC en BC verbind. $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \frac{\pi}{6}$. Sektor OAB is geskakeer.



(a) Bepaal die omtrek van sektor OAB. (3)

(b) Bepaal die oppervlakte van sektor OAB. (3)

5.2 **Gebruik die diagramvel op die antwoordblad** en maak 'n sketsgrafiek van $y = -bgsin(x - \frac{1}{2})$. Toon duidelik die x- en y-afsnit aan. (5)

5.3 Gegee die stelsel vergelykings:

$$\begin{array}{llll} 2x & +y & +z & = 0 \\ x & -2y & -z & = \boldsymbol{p} \\ 4x & +3y & +2z & = 1 \end{array}$$

Die waarde van x = 2. Gebruik Cramer se metode en bepaal die waarde van $\boldsymbol{p}$**.**
Aanvaar dat

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Toon duidelik die determinante waarmee jy werk. (8)

VRAAG 6 [23 PUNTE]

Gegee die grafiek met vergelyking $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-1}$.

6.1 Bereken die grafiek se x- en y-afsnitte. (4)

6.2 Bepaal die vergelykings van die asimptote van f. (4)

6.3 Wat word die tipe diskontinuïteit geoem wat by die vertikale asimptoot ontstaan? Gee ʼn rede. (2)

6.4 Toon aan dat f geen stasionêre punte het nie. (7)

6.5 **Gebruik die diagramvel op die antwoordblad** en maak ʼn sketsgrafiek van f. Toon duidelik die afsnitte met die asse en die asimptote op jou skets aan. (6)

VRAAG 7 [19 PUNTE]

7.1 Gebruik wiskundige induksie en bewys dat

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(9)

7.2 Gebruik 'n Riemannsom en bereken die waarde van $\int_1^3 3x^2\, dx$. (10)

VRAAG 8 [22 PUNTE]

8.1 Gegee die funksie: $f(x) = \begin{cases} \text{bg}\tan x + 1 & \text{as} \quad x < 0 \\ 1 & \text{as} \quad x = 0 \\ x + 1 & \text{as} \quad x > 0 \end{cases}$

(a) Toon aan dat $f(x)$ kontinu is vir $x = 0$. (4)

(b) Bepaal of $f(x)$ differensieerbaar is by $x = 0$. (4)

8.2 Differensieer die volgende, soos gevra:

(a) Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = lnx \times \log x$. (3)

(b) $D_x[\sec\left(\frac{2}{x}\right)]$ (3)

(c) As $y = xe^x + ye^y - e$, gebruik implisiete differensiasie en bepaal $\frac{dy}{dx}$. (8)

VRAAG 9 [18 PUNTE]

Bepaal die volgende integrale

9.1 $\int (2x^2 + 2^x + e^{-x})dx$ (4)

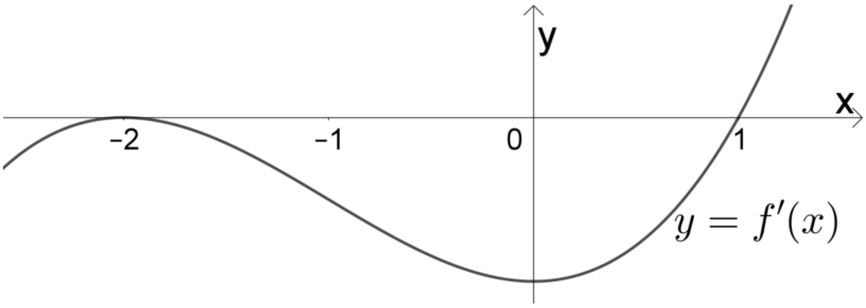
9.2 $\int \frac{x^2-5x+6}{(x^2+1)(x-1)}\, dx$ deur van parsiële breuke gebruik te maak. (9)

9.3 $\int \sin^5(5x)\,.\cos(5x)\, dx$ Jy mag substitusie gebruik. (5)

VRAAG 10 [21 PUNTE]

10.1 Die funksie $f(x) = \sqrt{2x} - \sin x - 2$ het 'n nulpunt in die interval $[2; 3]$. Gebruik Newton se metode en bepaal die waarde van hierdie nulpunt korrek tot 4 desimale syers. Toon duidelik hoe jy Newton se metode gebruik. (4)

10.2 Die skets hieronder toon die grafiek van $\boldsymbol{y = f'(x)}$**,** die afgeleide van $y = f(x)$. Hierdie grafiek het 'n lokale maksimum draaipunt by $(-2; 0)$ en dit sny die x-as by $x = 1$. Dit het 'n lokale minimum draaipunt waar $x = 0$.



Motiveer telkens jou antwoorde deur na f' en/ of f'' te verwys.

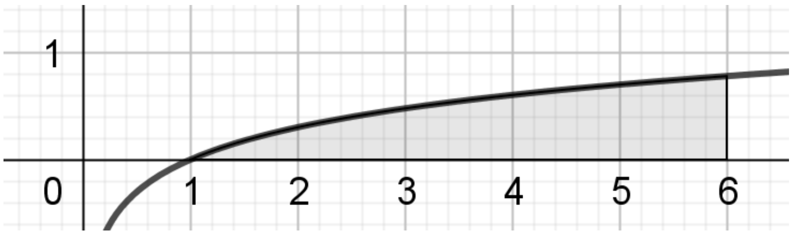
By watter waarde(s) van x sal $\boldsymbol{y = f(x)}$

(a) 'n draaipunt hê? Sê ook of dit maksimum of minimum is. (3)

(b) 'n buigpunt (knak punt) hê wat ook 'n stasionêre punt is? (4)

(c) konkaaf af wees? (3)

10.3 Die skets toon die grafiek van $f(x) = lnx$, met die gebied tussen die x-as, die grafiek en die lyn $x = 6$ geskakeer. Gebruik **faktorintegrasie** en bepaal die oppervlakte van hierdie gebied. Toon al jou integrasie stappe, anders sal punte nie toegeken word nie. Gee die antwoord in die vorm $alnb + c$.



(7)