α-WISKUNDE

Alpha Wiskunde
MEMORANDUM EKSAMENVRAESTEL

3 November 2020 **Graad 12**
Totaal: 200 punte

VRAAG 1 [20 PUNTE]

1.1 Gegee $f(x) = \sqrt{5x}$. Dan is $f'(5) =$

$f(x) = \sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}$; Dus $f'(x) = \sqrt{\frac{5}{x}}.\frac{1}{2}$; Dus $f'(5) = \frac{1}{2}$

1.2 Die magreeks $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-5}$ se uitbreiding sal geldig wees indien

$\left|-\frac{x}{2}\right| < 1$; Dus $|x| < 2$

1.3 Die grafiek van $y = -|2x - 6| - 4$ het 'n knakpunt by

(C) $(3;\ -4)$

1.4 Die funksie $f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & as \quad x < 2 \\ 2x + 4 & as \quad x \geq 2 \end{cases}$ is kontinu. Die waarde van $c =$

$4c + 4 = 4 + 4$; Dus $c = 1$

1.5 Die grootte van die vektor $2i - 3j + ak$ is $\sqrt{14}$. Dan is 'n moontlike waarde van $a =$

$4 + 9 + a^2 = 14$; Dus $a = \pm 1$

1.6 Watter een van die volgende bewerings is altyd waar:

(C) As f differensieerbaar in $x = a$ is, dan is $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

1.7 Die gradiënt van die raaklyn aan die grafiek $\sin x + \cos y = \sqrt{3}$ by die punt $(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6})$ is gelyk aan

$\cos x - \sin y.\frac{dy}{dx} = 0$; Dus $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin y} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}} = 1$

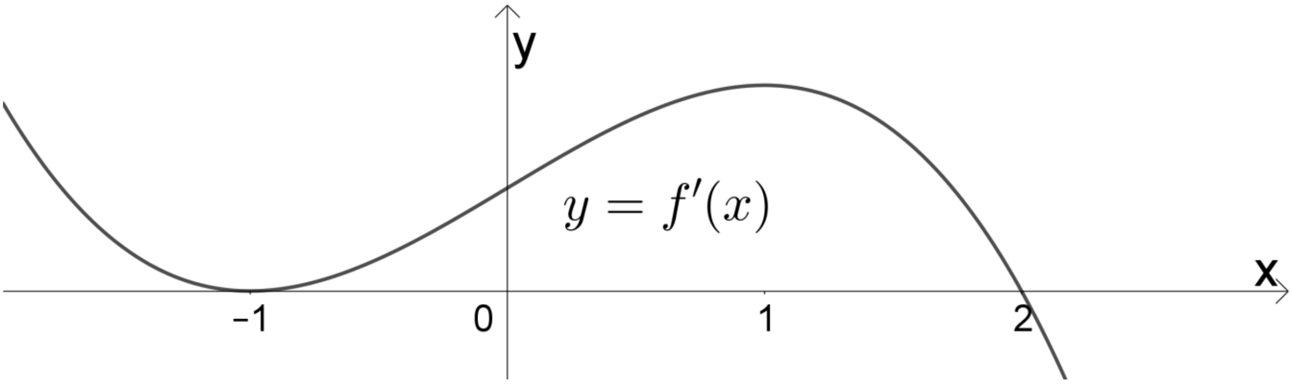
1.8 $\int_0^a e^x\, dx = 2$, dan is $a =$

$e^x \Big|_0^a = e^a - e^0 = 2$, Dus $e^a = 3$, $a = ln3$

1.9 Die posisie funksie van 'n partikel word gegee deur $S(t) = 6 + 3t^2 - t^3, t \geq 0$. Wanneer sal die partikel geen versnelling hê nie? By $t =$

$S'(t) = 6t - 3t^2$; Dus versnelling = $S''(t) = 6 - 6t = 0$; Dus $t = 1$

1.10 Die grafiek van f', die afgeleide van f word hier onder getoon.



Watter een van die volgende bewerings is **nie** waar nie: Die grafiek van $y = f(x)$

A waar want $f'' > 0$

B waar want $f' = 0$

C waar want $f'' = 0$ en verskil weerskante van teken

D Onwaar, daar is lokale maksimum

1.1	**A**	**B**	**C**	**D**
1.2	**A**	**B**	**C**	**D**
1.3	**A**	**B**	**C**	**D**
1.4	**A**	**B**	**C**	**D**
1.5	**A**	**B**	**C**	**D**
1.6	**A**	**B**	**C**	**D**
1.7	**A**	**B**	**C**	**D**
1.8	**A**	**B**	**C**	**D**
1.9	**A**	**B**	**C**	~~**D**~~
1.10	**A**	**B**	**C**	**D**

VRAAG 2 [18 PUNTE]

2.1 (3)

$\frac{x}{2}+10=ln50$	1:$ln50$
$x=2(ln50-10)$	1: $2(ln50-10)$ (volpunte)
$=-12{,}18$	1: $-12{,}18$

2.2(a) (2)

$M_C=9.5=\log\frac{T_C}{k}$	1: Vervang
$\therefore T_C=k10^{9.5}$	1: $k10^{9.5}$

2.2(b) (3)

(b) Netso: $T_S=k10^{6.5}$	1: $T_S=k10^{6.5}$
$\therefore \frac{T_C}{T_S}=\frac{k10^{9.5}}{k10^{6.5}}=10^{9{,}5-6.5}$	1: $\frac{T_C}{T_S}=\frac{k10^{9.5}}{k10^{6.5}}$
$\frac{T_C}{T_S}=10^3=1\,000$	1: 10^3

2.3 (5)

As $x<2$: (Slegs: $x\geq 2$ deel $-$ $maks$ $2/5$)	1: Voorwaarde (Ander onnodig)
$-x+2=x^2$	1: Haal uit abs waarde
$x^2+x-2=0$	1: Vergelyking
$(x+2)(x-1)=0$	1: Faktoriseer
$x=-2$ of $x=1$	1: Antwoorde

2.4 (5)

$\begin{vmatrix}1 & 3 & k\\ 4 & -2 & -10\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$	1: Determinant 1: =0
$1(-4+10)-3(8+10)+k(4+2)=0$	1: Vereenvoudig determinant
$6k=48$	1: $6k=48$
$k=8$	1: Antwoord

VRAAG 3 [18 PUNTE]

3.1 (8)

$1-\sqrt{3}i = 2cis(-\frac{\pi}{3})$	1: 2 (r)
	1: $-\frac{\pi}{3}$ (θ)
$-1+i=\sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})$	1: $\sqrt{2}$ (r)
	1: $\frac{3\pi}{4}$ (θ)
$\frac{\left(2cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^4}{\left(\sqrt{2}cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{12}}=\frac{2^4cis\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}{2^6cis(9\pi)}$	1: Verhef getalle tot regte mag
	1: Vermenigvuldig hoek met mag
$=\frac{16}{64}cis(-\frac{31\pi}{3})$	1: Trek hoeke af van mekaar
$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}i$	1: Antwoord

Alternatief

$1-\sqrt{3}i = 2cis(\frac{5\pi}{3})$	1: 2 (r)
	1: $\frac{11\pi}{3}$ (θ)
$-1+i=\sqrt{2}cis(\frac{3\pi}{4})$	1: $\sqrt{3}$ (r)
	1: $\frac{3\pi}{4}$ (θ)
$\frac{\left(2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^4}{\left(\sqrt{3}cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{12}}=\frac{2^4cis\left(-\frac{20\pi}{3}\right)}{2^6cis(9\pi)}$	1: Verhef getalle tot regte mag
	1: Vermenigvuldig hoek met mag
$=\frac{16}{64}cis(-\frac{57\pi}{3})$	1: Trek hoeke af van mekaar
$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}i$	1: Antwoord

3.2 (10)

$\Delta x_i = \frac{3}{n}$	1: Δx_i
$x_i = \frac{3i}{n}$	1: x_i
$f(x_i) = 3(\frac{3i}{n})^2 + 2\left(\frac{3i}{n}\right) - 1 = 27i^2 + \frac{6}{n}i - 1$	1: $f(x_i)$
$\sum_{i=1}^{n}\left(27i^2 + \frac{6}{n}i - 1\right)$	1: Sigma reg
$= \frac{27}{n}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) + \frac{6}{n}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) - n$	3: Vervang i^2, i en 1
$= 9n + \frac{27}{2} + \frac{9}{2n} + 3n + 3 - n = 11n + \frac{33}{2} + \frac{9}{2n}$	1: Vereenvoudig (hoef nie te toon nie)
$\Delta x_i \times \sum f(x_i) = 11n.\frac{3}{n} + \frac{33}{2}.\frac{3}{n} + \frac{9}{2n}.\frac{3}{n}$	1: Vermenigvuldig met Δx_i
$\int_0^3 (3x^2 + 2x - 1)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = 33$	1: Antwoord. Slegs antwoord, geen punte.

Alternatief

$\Delta x_i = \frac{3}{n}$	1: Δx_i
$x_i = \frac{3i}{n}$	1: x_i
$f(x_i) = 3(\frac{3i}{n})^2 + 2\left(\frac{3i}{n}\right) - 1 = \frac{27i^2}{n^2} + \frac{6}{n}i - 1$	1: $f(x_i)$
$\Delta x_i \times f(x_i) = \frac{81i^2}{n^3} + \frac{18}{n^2}i - \frac{3}{n}$	1: $\Delta x_i \times f(x_i)$
$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{81i^2}{n^3} + \frac{18}{n^2}i - \frac{3}{n}\right)$	1: Sigma reg
$= \frac{81}{n^3}(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}) + \frac{18}{n^2}\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) - \frac{3}{n}.n$	3: Vervang i^2, i en 1
$= 27 + \cdots + 9 + \cdots - 3$	1: Vereenvoudig (hoef nie alles te toon nie)
$\int_0^3 (3x^2 + 2x - 1)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i = 33$	1: Antwoord

VRAAG 4 [20 PUNTE]

4.1 (6)

(a) $\lvert u\rvert = \sqrt{6}$	1: grootte u
(b) $u.v = -2 - 2 - 3$	1: bereken puntproduk
$u.v = -7$	1: antwoord puntproduk
(c) $\lvert v\rvert = \sqrt{14}$	1: grootte v
$\cos\theta = \frac{u.v}{\lvert u\rvert\lvert v\rvert}$	
$\cos\theta = \frac{-7}{\sqrt{6}.\sqrt{14}}$ (of $\cos\theta = -0{,}763 \ldots \;\; of \; = -\frac{\sqrt{21}}{6}$	1: vervang reg
$\theta = 2{,}44$ radiale	1: antwoord

(b) (6)

$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$	1: determinant
$= i + 5j + 3k$	3: elke term
Oppervlakte = $\sqrt{1 + 5^2 + 3^2}$	1: vervang in formule
$= \sqrt{35}$ of 5,92	1: antwoord

Alternatief

Oppervlakte = $\lvert 6\rvert \times \lvert 14\rvert \times \sin 2{,}44$
$= 5{,}92$

4.2 (8)

$x + 2 = \pm 5i$	1: ander wortel
$(x+2)^2 = -25$	2: kwadreer beide kante
$x^2 + 4x + 29$ is 'n faktor	1: faktor
$(x^2 + 4x + 29)(x^2 + x + 2) = 0$	3: elke term in ander faktor, enige metode
Geen reële wortels	1: antwoord

Alternatief vir eerste faktor:

$-2 + 5i$ ook faktor	1: ander wortel
$(x + 2 + 5i)(x + 2 - 5i)$ faktor	1: twee faktore
$x^2 + 4x + 29$ is 'n faktor	1: ander faktor

VRAAG 5 [19 PUNTE]

5.1 (6)

$r = 5$ en $n = 11$	2: r en n
$\binom{11}{5}\left(\frac{x^2}{2}\right)^6\left(-\frac{2}{x}\right)^5$	2: elke eksponent reg
$= -231x^7$	2: getal en x^7

5.2 (5)

$(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$	1: eksponent
$= 1 - \frac{1}{2}(-2x) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-2x)^2}{2} + \cdots$	2: terme 2 en 3
$= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \cdots$	2: terme 2 en 3
(Indien x pleks van $-2x$: $1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$)	Maks: 2 punte
(Indien $2x$ pleks van $-2x$: $1 - x + \frac{3}{2}x^2$)	Maks: 4 punte

5.3 (a) (1)

Aanvaar bewering waar vir $n = k$

(b) (7)

$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{4(k+1)^2-1}$	1: vervang 1e klomp terme
$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{4k^2+8k+3}$	1: vermenigvuldig hakies
$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$	1: faktoriseer
$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$	2: noemer en teller
$= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$	1: vereenvoudig teller
$= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$	1: faktoriseer
$= \frac{k+1}{2k+3}$ = RK	

VRAAG 6 [25 PUNTE]

6.1 (6)

$A(-2;\frac{2\pi}{3})$	2: x en y
$B(0;-\frac{\pi}{3})$	1: B
C: $bgcos(x+1)=\frac{\pi}{3}$	1: vergelyking
$x+1=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$	1: verander na cos
$x=-\frac{1}{2}$	1: $-\frac{1}{2}$

6.2 (5)

$\frac{BA}{1}=\tan\theta$	1: BA=tan θ
Oppv.$\Delta OAC=\frac{1}{2}.1.1.\sin\theta=\sin\theta$ Oppv.$sektor\ OAC=\frac{1}{2}.1^2.\theta=\theta$ Oppv. $\Delta OAB=\frac{1}{2}.1.\tan\theta=\tan\theta$	3: elke oppervlakte
Maar Oppv. $\Delta OAB >$ Oppv.$sektOAC >$ Oppv. $\Delta OAC <$ $\therefore \tan\theta > \theta > \sin\theta$	1:dalende orde

(b) As $\theta=\frac{\pi}{3}$, bepaal die omtrek van die geskakeerde gedeelte ABC. (5)

Boog CA = $\theta r=\frac{\pi}{3}$	1: Boog CA
BA = $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$	1: BA
OB = 2	1: OB
Dus CB = 1	1: CB
Omtrek = $\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$ +1 OF 3,78	1: antwoord

6.3 (a) (i) (3)

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=2$	1: limiet van links
$\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$	1: liniet van regs
Sprong diskontinuïteit	1: antwoord

(ii) (3)

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-3$	1: limiet van links
$\lim_{x\to 1^+} f(x)=-3$	1: liniet van regs
$f(1)=-3$	
Dus $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$, dus kontinu	1: antwoord.

(b) (3)

$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=-1$	1: limiet van links
$\lim_{x\to 1^+} f'(x)=-2$	1: liniet van regs
Nee, nie diff.baar nie	1: antwoord

VRAAG 7 [18 PUNTE]

7.1 (4)

Vertikaal: $x = 1$	1: vertikaal
Skuins: $\frac{-1 \quad 2}{|1 \quad -3 \quad 6}$	1: metode
Dus $y = -x + 2$	2: skuins

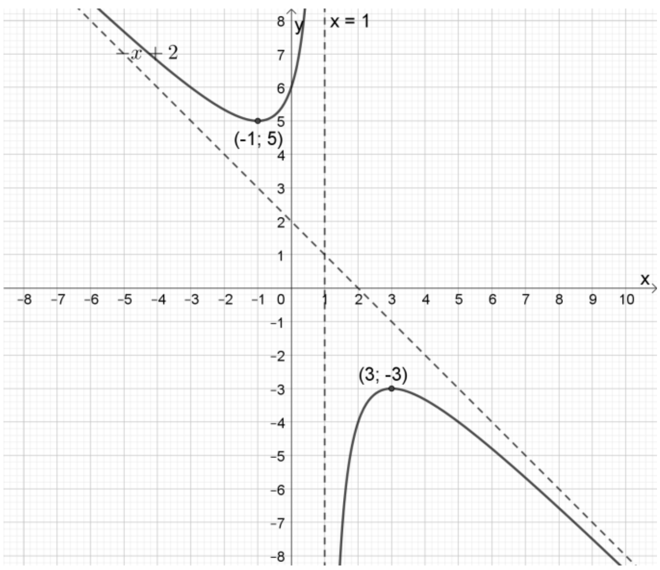
7.2 (7)

$f'(x) = 0$	1: afgeleide = 0
$\frac{(1-x)(2x-3)-(x^2-3x+6)(-1)}{(1-x)^2} = 0$	1: differensieer
$-2x^2 + 5x - 3 + x^2 - 3x + 6 = 0$	1: vereenvoudig
$x^2 - 2x - 3 = 0$	1: drieterm
$(x-3)(x+1) = 0$	1: faktoriseer
$(3; -3)$ en $(-1; 5)$	2: elke draaipunt

7.3 (1)

$y = 6$	1: antwoord

7.4 (6)



Vertikale asimptoot	1
Skuins asimptoot	1
y-afsnit	1
draaipunte	2
vorm	1

VRAAG 8 [25 PUNTE]

8.1 (a) (3)

$f'(x) = 2.2^{2x+1}.ln2 - \operatorname{cosec} x \cot x$	1: $ln2$
	1: 2.2^{2x+1}
	1: $. - \operatorname{cosec} x \cot x$

(b) (3)

$\frac{1}{\sqrt{1-(ln4x)^2}} \times \frac{1}{x}$	1: regte vorm
	1: $(ln4x)^2$
	1: $\frac{1}{x}$ OF $\frac{1}{4x}.4$

8.2 (a) (2)

$2lny - \log x - \log y = \pi$	1: $2lny$
	1: logaritmes

(b) (6)

$\frac{2}{y}.y' - \frac{1}{xln10} - \frac{1}{yln10}.y' = 0$	2: $\frac{2}{y}.y'$
	2: ander twee terme
$y'\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{yln10}\right) = \frac{1}{xln10}$	1: Haal y' gemeenskapli uit
$y' = \frac{\frac{1}{xln10}}{\frac{2}{y} - \frac{1}{yln10}}$	1: antwoord
OF as breuke vereenvoudig:	
$\frac{yln10}{xln10(2ln10-1)} = \frac{y}{x(2ln10-1)}$	

8.3 (a) (8)

$\frac{dy}{dx} = -2e^{-2x}tanx + e^{-2x}\sec^2 x$	4: Differensiasie. Slegs 2 indien nie produk reël
$= e^{-2x}(-2\tan x + \tan^2 x + 1)$	1: identiteit
$= e^{-2x}(\tan x - 1)^2$	
$\therefore e^{-2x}(\tan x - 1)^2 = 0$ (stasionêre punt)	1: stel gelyk aan 0
$\tan x = 1$	1: vergelyking
$x = \frac{\pi}{4}$	1: antwoord

(b) (3)

Bepaal die tweede afgeleide en stel dit gelyk aan 0.	1
Los op.	1
Indien daar wortel is, moet tekens weerskante verskil.	1

VRAAG 9 [19 PUNTE]

9.1 (4)

Stel $u = x^2 - x + 1$	1: Stel reg
$du = (2x-1)dx$	1: differensieer
$\int \sin u \, du = -\cos u + k$	1: vervang en integreer
$\int (2x-1)\sin(x^2 - x + 1)\, dx = -\cos(x^2 - x - 1) + k$	1: antwoord. Net antwoord, volpunte

9.2 (7)

Stel $f = 2x - 1$ en $g' = \sin(2x)$	2
Dus $f' = 2$ en $g = -\frac{1}{2}\cos(2x)$	1
Dus $(2x-1).\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x - \int 2.\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x \, dx$	1: Vervang in formule
$= \left((2x-1).\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}$	1: integreer
$= (\pi - 1)\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\pi - (0-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 0$	1: vervang
$= \frac{\pi}{2} - 1 \; of \; \frac{\pi - 2}{2}$	1: antwoord (0,57 alleen – maks 1/7)

9.3 (8)

$\frac{5x-7}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$	1
$5x - 7 = A(x-1) + B$	1: vermenigvuldig met kgv
Stel $x = 1: -2 = B$	1: B
$x: 5 = A$	1: A
$\int \left(\frac{5}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}\right) dx$	1: vervang reg
$\int \left(\frac{5}{x-1} - 2(x-1)^{-2}\right) dx$	1: eksponent
$= 5ln(x-1) - \frac{2(x-1)^{-1}}{-1} + k$	2: elke term

VRAAG 10 [18 PUNTE]

10.1 (5)

$f'(x) = \sin x + x\cos x$	2: differensieer
$x_{n+1} = \frac{1+x\sin x}{\sin x + x\cos x}$	1: vervang reg in formule
$x \approx 3{,}437$	1: antwoord
	1: drie desimale

10.2 (a) (5)

$\int_0^6 (x^2 - 4x + t)\,dx = 48$	1: vergelyking
$(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + tx)\Big\vert_0^6 = 48$	1: integreer
$\frac{6^3}{3} - 2(6^2) + 6t = 48$	1: vevang
$6t = 48$	1: vereenvoudig
$t = 8$	1: antwoord

(b) (5)

$y = 6^2 - 4(6) + 8 = 20$	1: bereken y
$m = f'(x) = 2x - 4$	1: m
$m = 8$	1: 8
$y - 20 = 8(x - 6)$	1: vervang in vergelyking
$y = 8x - 28$	1: antwoord

(c) (3)

$V = \pi\int_0^6 (x^2 - 4x + 8)^2\,dx - \pi\int_{\frac{7}{2}}^6 (8x - 28)^2\,dx$	1:regte formule
	1: elke term
	1: integrale appart
Indien:	
$V = \pi\int_0^6 (x^2 - 4x + 8 - 8x + 28)^2\,dx$	Slegs 1 punt