# $\alpha$-WISKUNDE

**Graad 12**

**Tyd: 3uur** **September 2016**

**Totaal: 200 punte**

**INSTRUKSIES EN INLIGTING**

1. Nommer die antwoorde soos die vrae genommer is.
2. Skryf netjies en leesbaar.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word.
4. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
5. Alle noodsaaklike berekeninge moet duidelik getoon word.
6. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet ook in radiale gegee word indien nodig.
7. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
8. Hierdie vraestel bestaan uit tien (10) bladsye en 3 formuleblaaie.
9. 'n Antwoordblad vir Afdeling A is bo aan jou antwoordstel. Skryf jou naam daarop.

## Afdeling A: Multikeuse

Afdeling A moet op die antwoordblad beantwoord word. Elke vraag het slegs **een** korrekte antwoord en tel twee (2) punte. Merk die korrekte antwoord met 'n **X**.

1. Watter van die volgende is gelyk aan $\frac{1}{1-i}$ ?

A) $\frac{1+i}{2}$

B) $\frac{1-i}{2}$

C) $1-i$

D) $1+i$

2. Indien $F(x) = e^{x^2-3}$ en $F(x) = f \circ g$, kan $f(x)$ en $g(x)$ as volg uitgedruk word:
   A) $f(x) = x^2 - 3$ en $g(x) = e^x$
   B) $f(x) = e^x$ en $g(x) = x^2 - 3$
   C) $f(x) = e^{x^2}$ en $g(x) = -3$
   D) $f(x) = ln\,(x)$ en $g(x) = x^2 - 3$

3. As $|3x - 2| \leq 1$ , sal
   A) $-3 \leq x \leq 3$
   B) $x \leq -3$ of $x \geq 3$
   C) $x \leq \frac{1}{3}$ of $x \geq 1$
   D) $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$

4. Gestel $a = e^{3x}$. Watter uitdrukking is gelyk aan $ln(a)^2$?

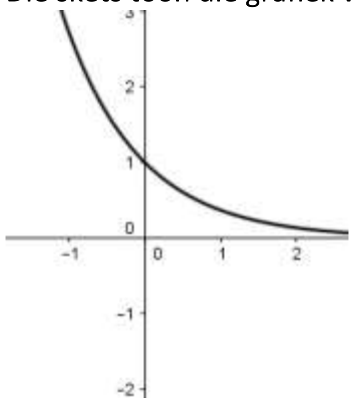
A) $6x$

B) $9x$

C) $x^3$

D) $e^{3x}$

5. Die skets toon die grafiek van $y = f(x)$.




As $-1 \leq x \leq 2$ is

A) $f'(x) > 0$ en $f''(x) > 0$
B) $f'(x) > 0$ en $f''(x) < 0$
C) $f'(x) < 0$ en $f''(x) < 0$
D) $f'(x) < 0$ en $f''(x) > 0$

6. Die vergelyking van die raaklyn by die $x$-afsnit van $y = ln\,(x)$ is
A) $y = \frac{1}{x} + 1$
B) $y = x - 1$
C) $y = -x - 1$
D) $y = -x + 1$

7. Indien $h(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$ , sal $h(x)$ by die punt $x = 3$,
A) 'n vertikale asimptoot hê.
B) 'n horisontale asimptoot hê.
C) 'n skuins asimptoot hê.
D) ongedefinieerd wees.

8. Die stasionêre punt, $(1; 2)$, van $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$
A) is 'n lokale maksimum
B) is 'n buigpunt
C) is nie 'n buigpunt nie
D) nie een van bogenoemde nie.

9. Die uitbreiding, met behulp van magreekse,van $\sqrt{1-2x}$ sal geldig wees as

A) $|x| < 2$
B) $|x| > 2$
C) $|x| < \frac{1}{2}$
D) $|x| > \frac{1}{2}$

10. Die waarde van $\int_1^a \frac{dx}{2x}$ is

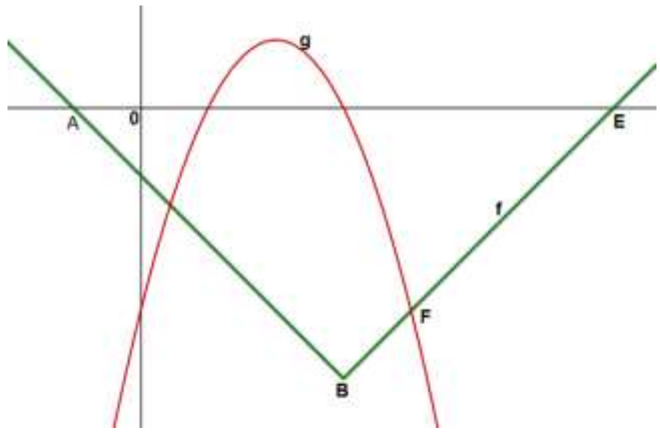
A) $\frac{ln\,(a)}{2}$
B) $2ln\,(a)$
C) $\frac{-1}{2}x^{-2}$
D) $\frac{1}{2}ln\sqrt{a}$

**[20]**

# Afdeling B

## Vraag 1

1.1 Die skets toon die funksies $f(x) = |-x+3| - 4$ en $g(x) = -x^2 + 4x - 3$

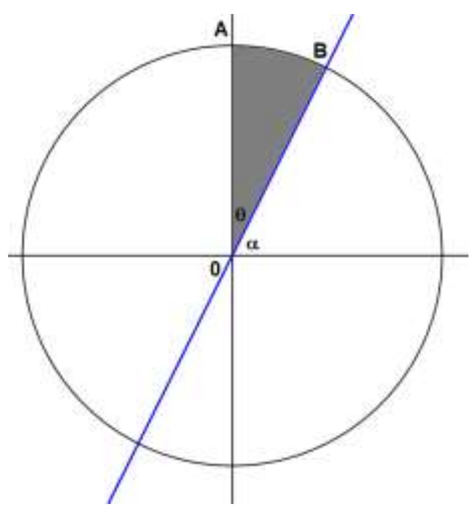



(a) Bereken die koördinate van A en E, die $x$-afsnitte van $f$. (4)

(b) Gee die koördinate van B, die knakpunt van $f$. (2)

(c) Bereken die koördinate van F, die snypunt van $f$ en $g$, waar $x > 2$. (4)

1.2 ‘n Sirkel met radius van 5 sny die $y$ –as by A en die lyn $y = 2x$ by B.




(a) Gebruik trigonometrie en toon aan dat $\alpha = 1{,}11$ radiale. (2)

(b) Bereken vervolgens die grootte van $\theta$ (2)

(c) Bereken die oppervlakte van sektor AOB as $\theta = 0{,}46$ radiale. (3)

**[17]**

## Vraag 2

2.1 Gebruik wiskundige induksie en bewys dat die volgende bewering geld vir alle $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$:
$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ (10)

2.2 $P(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$

Indien $P(1 + i) = 0$, bereken die heeltallige wortel van $P(x)$. (5)

2.3

(a) Herlei $a = 1 + \sqrt{3}i$ en $b = 1 - \sqrt{3}i$ na poolvorm. Gee die antwoorde as $rcis\theta$ met $r$ in wortelvorm en $\theta$ in terme van $\pi$. (4)

(b) Gebruik **De Moivre se stelling** en toon aan dat $\frac{a}{b^2}$ 'n reële getal is. Toon al jou bewerkings. (5)

**[24]**

## Vraag 3

3.1 Gegee die stelsel vergelykings:

$\boldsymbol{bx + 3by = -1}$ en $\boldsymbol{2bx - by = 5}$,

gebruik **Cramer se reël** en bereken $\boldsymbol{b}$ as $x = 2$. Toon duidelik hoe jy Cramer se reël gebruik en watter determinante jy gebruik.

(5)

3.2. Bepaal en vereenvoudig die vyfde term in die uitbreiding van $\left(-2x + \frac{1}{x}\right)^{10}$. (7)

3.3 $f(x) = 3sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(a) Die inverse van die funksie is nie ‘n funksie nie, tensy die definsieversameling van $f$ beperk word. Gee ‘n interval van die definisiegebied sodat die inverse ‘n funksie sal wees (3)

(b) Bepaal die inverse in die vorm $f^{-1}(x) =$ (4)

(c) Skets $f^{-1}$. Toon die afsnitte met die asse en die koördinate van die eindpunte duidelik aan. (6)

**[25]**

## Vraag 4

4.1 Bepaal die afgeleide van $f(x) = \frac{-2}{x}$ vanaf grondbeginsels. (5)

4.2 Bepaal die volgende. (antwoorde hoef nie vereenvoudig te word nie).

(a) $h'(x)$ as $h(x) = bgsin\left[bgtan\left(\sqrt[3]{2x}\right)\right]$ (5)

(b) $D_x\left[\frac{e^x ln\,(x)}{x}\right]$. (6)

4.3 Gebruik implisiete differensiasie en bepaal $\frac{dy}{dx}$ indien $\sqrt{ln|y|} = 5x + \frac{1}{y}$ (10)

**[26]**

## Vraag 5

5.1 Skets grafiese voorstellings van die volgende op verskillende assestelsels (net rowwe sketse):

(a) $f'(x) = 0$ vir alle $x \in \mathbb{R}$

(b) $f'(x) = 0$ en $f''(x) > 0$

(c) ‘n verwyderbare diskontinuïteit

(d) $f$ is kontinu by $x = 3$, maar nie differensieerbaar by $x = 3$ nie. (8)

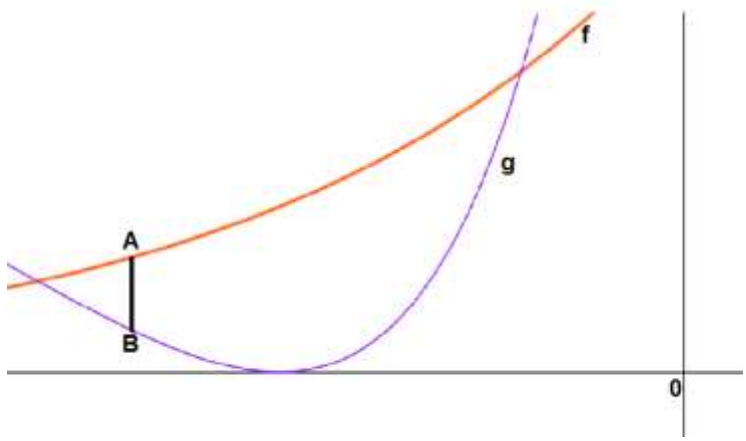
5.2 $g(x) = (f(x) + 1)^2 - 1$
Bepaal die gradiënt van die raaklyn aan die funksie van $g$ by $x = 0$ as $f(0) = 1$ en $f'(0) = 2$. (5)

5.3 Gebruik die Newton-Rhapson-metode en bereken die nulpunt van die funksie $f(x) = 3sinx - 2tanx$ korrek tot vier desimale plekke.
Gebruik $x = 1$ as eerste benadering. (5)

**[18]**

## Vraag 6

6.1 Die diagram toon die funksies $f(x) = e^x$ en $g(x) = (e^{x+1} - 1)^2$ vir $x < 0$. A is 'n punt op $f$ en B 'n punt of $g$ só dat AB ewewydig is aan die $y$-as.




Bereken vir watter $x$-waarde AB die **maksimum** lengte sal wees. (9)

6.2 Beskou die funksie $f(x) = x - \frac{3}{x-2} = \frac{x^2-2x-3}{x-2}$

(a) Bepaal die vergelykings van alle asimptote van $f(x)$. (4)

(b) Die funksie is streng stygend. Die afsnitte op die asse is $(-1; 0)$, $(3; 0)$ en $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.
Maak 'n sketsgrafiek van $f(x)$ en toon die afsnitte met die asse en asimptote duidelik aan. (8)

**[21]**

## Vraag 7

Bepaal die volgende integrale:

7.1 $\int\ [sec(2x-5).\,ta\,n(2x-5)+(2x-5)^3]\,dx$ (5)

7.2 $\int(2x+1).\,e^{2x+1}\ \ dx$ (Wenk: gebruik faktorintegrasie/ stuksgewyse integrasie) (6)

7.3

(a) Ontbind $f(x)$ in parsiële breuke as dit gegee word dat
$f(x)=\frac{3x^2+18}{x^2(x^2+9)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x^2+9}$ (6)

(b) Bepaal vervolgens $\int f(x)\ \ dx$ (6)

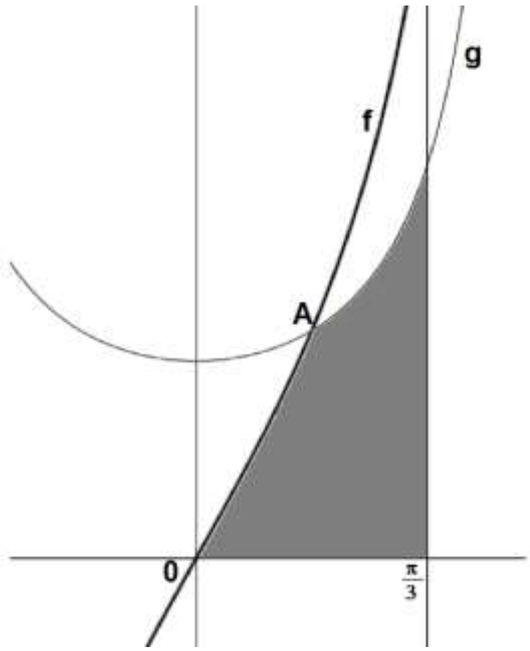
**[23]**

## Vraag 8

8.1 Gebruik 'n Riemannsom en bereken $\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$. (10)

8.2 Die oppervlak wat ingesluit word deur die kromme $f(x)=\frac{cos\,(ln(x-1))}{x-1}$, die $x$-as en die lyne $x=2$ en $x=a$, is gelyk aan $\frac{1}{2}$. Bereken die waarde van $a$ in terme van $e$.
Wenk: stel $u=ln\,(x-1)$ en gebruik substitusie as jy wil. (10)

8.3 Die skets toon die grafieke $f(x) = 2tan\ (x)$ en $g(x) = sec\ (x)$.
Die oppervlak as $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ is geskakeer. Die grafieke sny mekaar by A.




Die grafieke sny by A met $x$-waarde van $\frac{\pi}{6}$. Skryf 'n vergelyking neer waarmee die volume van die geskakeerde gebied bereken kan word. (6)

**[26]**

## Totaal: 200