Alpha Wiskunde

Graad 12 Eksamenvraestel

20 Oktober 2017

Totaal: 200 punte **Tyd: 3 ure**

INSTRUKSIES

1. Beantwoord alle vrae op die vraestel en gee dit so in. Onthou om jou naam en ID nommer voor op die vraestel te skryf.
2. Skryf netjies en leesbaar.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word.
4. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
5. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet ook in radiale gegee word indien nodig.
6. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
7. Hierdie vraestel bestaan uit 10 vrae en 3 formulebladsye.
8. Vraag 1 bestaan uit 10 meervoudige keuse vrae. Beantwoord dit op die antwoordblad. Hierdie antwoordblad is aan die voorkant van die vraestel. Moet dit asseblief NIE losmaak nie.
9. By al die ander vrae moet alle noodsaaklike berekeninge duidelik getoon word. Die korrekte antwoord alleen sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Daar is ekstra spasie aan die einde van die vraestel. Dui duidelik aan as jy dit gebruik by 'n vraag.

VRAAG 1 [20 punte]

Beantwoord hierdie vraag op die antwoordblad wat voor aangeheg is deur telkens 'n X (kruisie) op A, B, C of D te maak. Moet asb. nie hierdie bladsy losmaak van die vraestel nie. Hierdie vrae tel 2 punte elk.

1.1 As $f(x) = logx$, dan is $f'(x) =$

(A) $\frac{1}{x}$

(B) $\frac{1}{x.lne}$

(C) $\frac{1}{x.lnx}$

(D) $\frac{1}{x.ln10}$

1.2 Gegee $f(x) = \ln(x+1)$. Dan is die inverse van $\boldsymbol{f}$ in die vorm $\boldsymbol{f^{-1}(x)} = \cdots$

(A) e^{x-1} (B) $e^x - 1$ (C) e^{x+1} (D) $e^x + 1$

1.3 As $\frac{dy}{dx} = 4x$ en $y = 4$ as $x = 0$, dan is $y =$...

(A) $4x + 2$ (B) $4+x^2$

(C) $2x^2 + 4$ (D) $2 + 4x^2$

1.4 Die grafiek van $y = |2x - 4| - 2$ het 'n knakpunt by ...

(A) $(-4; -2)$ (B) $(4; -2)$ (C) $(2; -2)$ (D) $(-2; -2)$

1.5 Watter een van die volgende uitdrukkings se magreeks-uitbreidings sal konvergeer as $|x| < 4$?

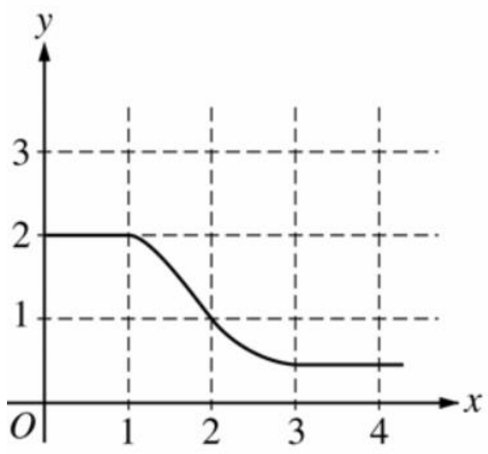
(A) $\frac{1}{1+4x}$ (B) $\frac{1}{4+x}$ (C) $\frac{1}{2-4x}$ (D) $\frac{1}{2x-4}$

1.6 $\sqrt{5} - 2$ is 'n nulpunt van 'n polinoom. Watter van die volgende sal dan 'n faktor van die polinoom wees?

(A) $x^2 + 4x - 1$ (B) $x - 2 - \sqrt{5}$

(C) $x^2 - 4x - 1$ (D) $x - 2 + \sqrt{5}$

1.7 Die skets regs toon die grafiek van f.
As $\int_1^3 f(x)\,dx = 2{,}3$ en $F'(x) = f(x)$,
dan sal $F(3) - F(0) = \ldots$



(A) 0,3

(B) 1,3

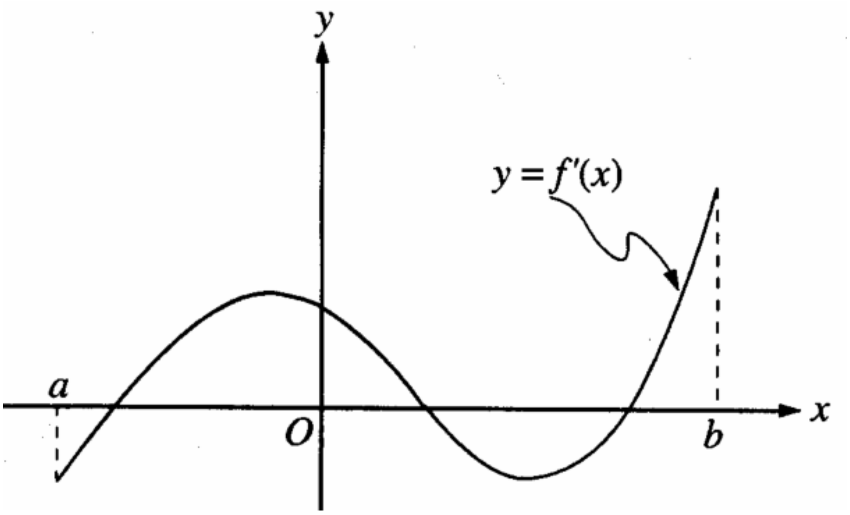
(C) 3,3

(D) 4,3

1.8 As $y = 2x - 8$, vir watter waarde van x sal die produk xy 'n minimum waarde hê?

(A) -16 (B) -8 (C) -4 (D) 2

1.9 Die grafiek van f', die afgeleide van f, word getoon.



Watter van die volgende beskryf die lokale stasionêre punte van f in die interval $(a; b)$?

(A) Een lokale maksimum en twee lokale minimum punte.

(B) Een lokale minimum en twee lokale maksimum punte.

(C) Drie lokale minimum punte.

(D) Drie lokale maksimum punte.

1.10 As $e^{f(x)} = 1 + x^2$ dan is $f'(1) = \ldots$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 4 (D) $2e^2$

Beantwoord die volgende vrae op die vraestel op die lyne wat onder aan elke vraag voorsien is.

VRAAG 2 **[20 punte]**

2.1 ’n Mikrobioloog bestudeer ’n sekere bakterie. Die aantal bakterieë in die monster kan bepaal word met die formule $N = 5{,}85(2^{kt})$ waar t die tyd in uur, k ’n konstante en N die aantal bakterieë in miljoen is.

(a) Bepaal hoeveel miljoen bakterieë daar aanvanklik was. (2)

(b) Bereken die waarde van k, korrek tot 4 desimale syfers, indien daar na 20 uur 7,68 miljoen bakterieë is. (3)

(c) Gebruik $k = 0{,}02$ en bereken die tempo waarteen die bakterieë vermeerder na 20 uur. (4)

2.2 Gegee $P(x) = x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 9x - 13$ met 'n wortel $2 - 3i$.
Ontbind $P(x)$ in faktore met rasionale koëffisiënte. (5)

2.3 Die koëffisiënt van x^3 in die uitbreiding van $(2 + ax)^5$ is 10 keer dié van x^2 in die uitbreiding van $\left(1 + \frac{ax}{3}\right)^4$. Gebruik die binomiaalstelling en bereken die waarde van a, $a \neq 0$. (6)

VRAAG 3 [21 punte]

3.1 Gegee die stelsel vergelykings:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ 2x + 3z &= 4 \\ -x + 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

(a) Skryf die stelsel in matriks vorm. (2)

(b) Los vervolgens op vir z. Gebruik Cramer se metode en toon duidelik met watter determinante jy gewerk het. (5)

3.2 Gebruik de Moivre se stelling en rasionaliseer die noemer van $\frac{16}{(-1-i)^8}$.
Werk in poolvorm en gebruik wortelvorm en π indien nodig.
Gee die antwoord in reghoekige vorm, $a + bi$. (6)

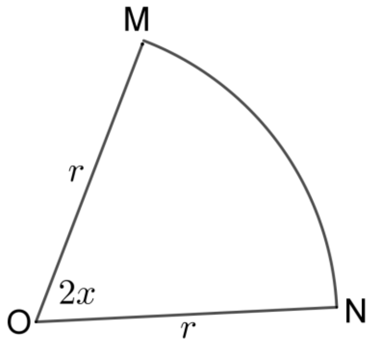
3.3 Gebruik wiskundige induksie en bewys dat vir alle $n \in \mathbb{N}$ is: (8)

$$-1 + 4 - 9 + \cdots + (-1)^n n^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$$

VRAAG 4 [23 punte]

4.1 Los op vir x: $|x^2 - 4| = x + 8$ (6)

4.2 Die skets toon 'n sektor van 'n sirkel OMN met middelpunt O. Die radius is r en $M\hat{O}N = 2x$.



a) Bepaal uitdrukkings, in terme van r en x, vir die omtrek, P en die oppervlakte, A, van die sektor. (2)

b) Toon vervolgens aan dat indien P = 20, sal $A = \frac{100x}{(1+x)^2}$. (4)

c) Bepaal $\frac{dA}{dx}$ en bereken vervolgens die waarde van x waarvoor die oppervlakte van die sektor ’n maksimum sal wees.
(*Dit is nie nodig om aan te toon dat dit ’n maksimum is nie*). (6)

4.3 $f(x) = sin2x$. Die inverse van $y = f(x)$ is nie ’n funksie nie.

a) Hoe kan die definisieversameling van f beperk word sodat die inverse wel ’n funksie sal wees? (2)

b) Gee vervolgens die vergelyking van f^{-1} in die vorm $y = \cdots$ (3)

VRAAG 5 **[21 punte]**

5.1 Gegee $f(x) = \begin{cases} bgtanx & as \quad x < 1 \\ x^2 & as \quad x = 1 \\ \frac{\pi}{4} & as \quad x > 1 \end{cases}$

Bepaal, met algebraïese motivering, of f kontinu is in die punt $x = 1$.
Indien nie, noem die tipe diskontinuïteit. (5)

5.2 Gebruik grondbeginsels en bepaal $f'(x)$ as $f(x) = \sqrt{1-x}$ (6)

5.3 Maak gebruik van 'n oneindige Riemann-som en bepaal $\int_1^2 (x^2 - x)\, dx$. (10)

VRAAG 6 **[17 punte]**

Gegee: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 12$.

6.1 Die grafiek van $y = f(x)$ het twee buigpunte. Bepaal die x-waardes van die buigpunte. Toon aan dat dit wel buigpunte is. (8)

6.2 Bepaal of die punte bereken in VRAAG 6.1 ook stasionêre punte is. (3)

6.3 Die grafiek van f sny die x-as op twee punte. Verduidelik waarom Newton se metode nie gebruik kan word met 'n aanvangswaarde van $x = -2$ nie. (2)

6.4 Gebruik $x = -3$ as aanvangswaarde en gebruik Newton se metode om een van die snypunte met die x-as te bereken. Gee jou antwoord korrek tot vier desimale syfers. Toon duidelik hoe jy Newton se metode gebruik. (4)

VRAAG 7 **[19 punte]**

7.1 Differensieer die vogende funksies:

a) $f(x) = secx \times (lnx)$ (3)

b) $g(x) = bgsin(e^{5x})$ (3)

7.2 'n Grafiek se vergelyking is $x^2 - 3xy + 25y^2 = 91$.

(a) Bepaal $\frac{dy}{dx}$ deur van implisiete differensiasie gebruik te maak. (5)

(b) Toon aan dat $\frac{dy}{dx} = 0$ by die punt (3;2). (1)

(c) Bepaal $\frac{d^2y}{dx^2}$ en bepaal vervolgens die aard van die draaipunt by (3; 2). (7)

VRAAG 8 **[17 punte]**

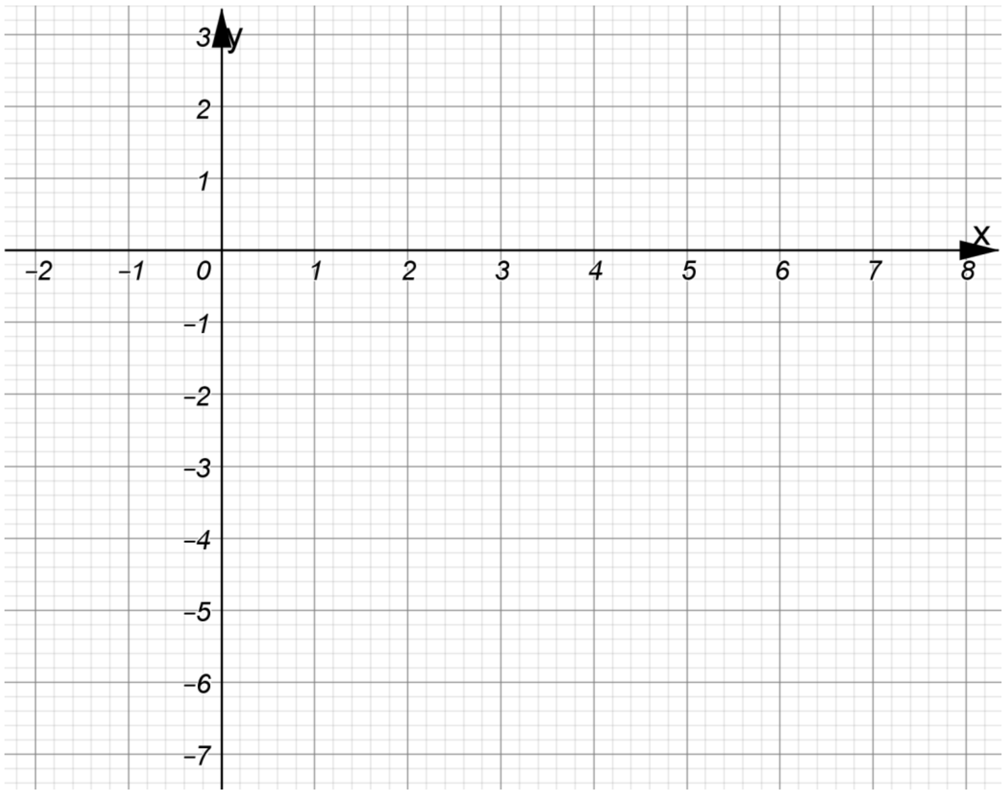
Gegee die rasionale funksie $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$

8.1 Gee 'n rede waarom die grafiek van f geen vertikale asimptote het nie. (1)

8.2 Die grafiek van f het 'n maksimum draaipunt by $(a; 0{,}3)$ en 'n minimum draaipunt by $(b;\ -5{,}4)$ met $a > 0$ en $b < 0$. Gebruik $f'(x) = 0$ en bepaal die waardes van a en b. (7)

8.3 Bepaal die x- en y- afsnitte van die grafiek van f. (3)

8.4 Gebruik die inligting vooraf verkry en maak 'n sketsgrafiek van $y = f(x)$ op die onderstaande assestelsel, as dit verder ook gegee word dat die grafiek 'n horisontale asimptoot by $y = 0$ het. (6)



VRAAG 9 **[25 punte]**

9.1 Bepaal die volgende integrale:

a) $\int \cot^2 x \, dx$ (4)

b) $\int_{2}^{5} \frac{(8x-1)}{(2x-1)(x+1)} dx.$

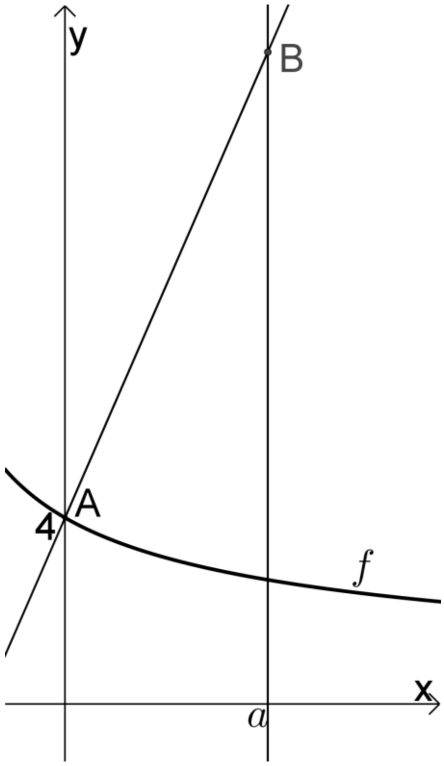
Gebruik parsiële breuke en gee die antwoord in die vorm $\boldsymbol{lnA}$ met $A \in \mathbb{Z}$ (10)

9.2 a) Gebruik faktor-integrasie en toon aan dat $\int lnx\, dx = xlnx - x + k$. (5)

b) Bepaal vervolgens $\int \frac{ln(lnx)}{x} dx$ (6)

VRAAG 10 **[17 punte]**

Die skets toon ’n gedeelte van die grafiek van $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+4}}$. Die grafiek sny die y-as by A(0; 4). Die normaal (dit is die lyn loodreg op die raaklyn) van die grafiek by punt A, sny die lyn $x = a$ by B.



10.1 Bepaal die vergelyking van AB. (7)

10.2 Bepaal die waarde van a indien die oppervlakte ingesluit deur die grafiek van f, die x-as en die y-as gelyk aan 16 is. (6)

10.3 Die area ingesluit deur die normaal AB, die grafiek van f en die lyn $x = a$, roteer om die x-as. Skryf 'n vergelyking neer waarmee die volume van hierdie omwentelingsliggaam bereken kan word. (*Moet dit nie bereken nie*). (4)

Ekstra Spasie