α-WISKUNDE

Alpha Wiskunde

Rekord Eksamenvraestel

Tyd: 3 ure | **Graad 12**

Totaal: 200 punte | **26 September 2017**

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Hierdie vraestel bestaan uit 10 bladsye, ‘n Antwoordblad van 2 bladsye en ‘n Formuleblad van 3 bladsye.
2. Beantwoord AL nege vrae.
3. Nommer die antwoorde soos die vrae genommer is.
4. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word.
5. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot TWEE desimale syfers afgerond word.
6. ALLE noodsaaklike berekeninge moet duidelik getoon word, behalwe in vraag een. Geen punte sal toegeken word indien slegs die antwoord neergeskryf is nie.
7. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
8. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word indien nodig.
9. Skryf netjies en leesbaar.

Vraag 1 [20 punte]

Hierdie vraag moet op die **ANTWOORDBLAD** beantwoord word.

Elke vraag het **SLEGS** een korrekte antwoord en tel twee (2) punte. Merk die korrekte antwoord met 'n **X** op die Antwoordblad.

KORREKTE MANIER:

A	**B**	**C**	**D**

VERKEERDE MANIER:

Die volgende aanduiding van antwoorde is **NIE** aanvaarbaar **NIE**:

A	**B**	**C**	**D**	**of**	**A**	**B**	**C**	**D**

1.1 Los op vir x in $2 - |5 - x| < 3$.

(A) $4 < x < 6$

(B) $x < 0$ of $x > 10$

(C) $x \in \mathbb{R}$

(D) Geen oplossing vir x

1.2 Watter vergelyking hieronder beskryf die volgende stelling die beste:

" 'n Funksie f is kontinu in die punt 5."

(A) $\lim_{x \to 0} f(x) = 5$

(B) $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$

(C) $\lim_{x \to 0} f(x) = f(5)$

(D) $\lim_{x \to 5} f(x) = f(5)$

1.3 Gegee: $f'(2) = \lim_{h \to 0} \dfrac{(2+h)^3 - 8}{h}$

Wat is die waarde van $f'(2)$?

(A) 14

(B) 12

(C) 6

(D) 2

1.4 Die uitbreiding van $\sqrt{4-2x}$ sal geldig wees as

(A) $|x| < 2$

(B) $|x| < \frac{1}{2}$

(C) $|x| > 2$

(D) $|x| > -\frac{1}{2}$

1.5 Wat is die reële deel van $3i^{41}(1+3i)+\sqrt{-25}$?

(A) 17

(B) -9

(C) 8

(D) -4

1.6 Watter uitdrukking is korrek?

(A) $\log_a x = \frac{1}{x.\ln a}$

(B) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}$ vir alle $x \in \mathbb{R}\,; a \neq e$

(C) $\int \ln x \; dx = \frac{1}{x} + k$

(D) $\int \frac{1}{x}\, dx = \log_e x + k$

1.7 Bepaal die x-koördinaat van die punt op die kromme $y = 2x^2 - 13x + 5$ waar die raaklyn aan die kurwe **parallel** (ewewydig) is aan die lyn $y = 3x$.

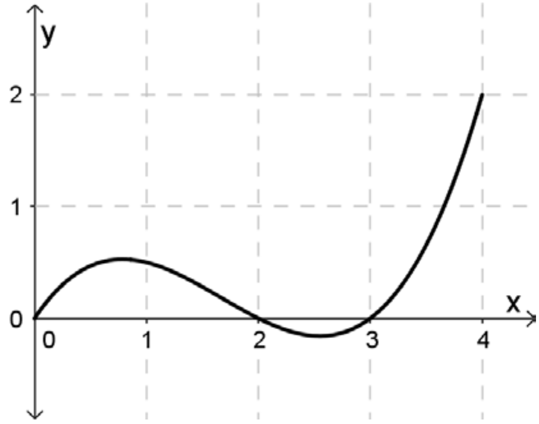
(A) $x = 4$

(B) $x = \frac{5}{2}$

(C) $x = 1$

(D) $x = 8$

1.8 Die funksie $y = f(x)$ is gedefinieer vir $x \in [0; 4]$. Die **afgeleide** van $f(x)$, $y = f'(x)$, is geskets hieronder. By watter punt het $f(x)$ 'n lokale **maksimum** waarde.



(A) $x = 0$

(B) $x = 1$

(C) $x = 2$

(D) $x = 3$

1.9 Gegee die volgende inligting aangaande $f(x)$:

$f(2) = 4$	$f'(2) = 5$	$f''(2) = 6$
$f(6) = 12$	$f'(6) = 11$	$f''(6) = 10$

Die waarde van $\displaystyle\int_2^6 f''(x)\ dx =$

(A) 8

(B) 2

(C) 4

(D) 6

1.10 Gegee die funksie: $y = \begin{cases} |2x| & \text{as} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{as} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Bepaal die x-waarde waar die **gradiënt** (afgeleide) **funksie** 'n sprong diskontinuïteit het.

(A) $x = -1$

(B) $x = 0$

(C) $x = 1$

(D) $x = 2$

Vraag 2 [20 punte]

2.1 Die volgende stelsel vergelykings word gegee:

$$\boldsymbol{a}x + 4y - z = 7$$
$$-x + y + 2z = 3$$
$$2\boldsymbol{a}x + 6y - 3z = 0$$

Bepaal die waarde van $\boldsymbol{a}$ sodat hierdie stelsel vergelykings geen oplossing het nie, deur gebruik te maak van Cramer se reël. (4)

2.2 Gegee dat $P(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 22x + 15$ en $P(2 - i) = 0$.

Faktoriseer $P(x)$ volledig oor $\mathbb{Z}[x]$. (6)

2.3 Bepaal die term in die uitbreiding van $\left(\frac{x}{5} + \frac{5}{x^2}\right)^{18}$ wat **onafhanklik** is van x.

Laat jou antwoord korrek tot DRIE desimale syfers. (5)

2.4 Bepaal die **eerste 3 terme**, in stygende magte van x, van die uitbreiding:

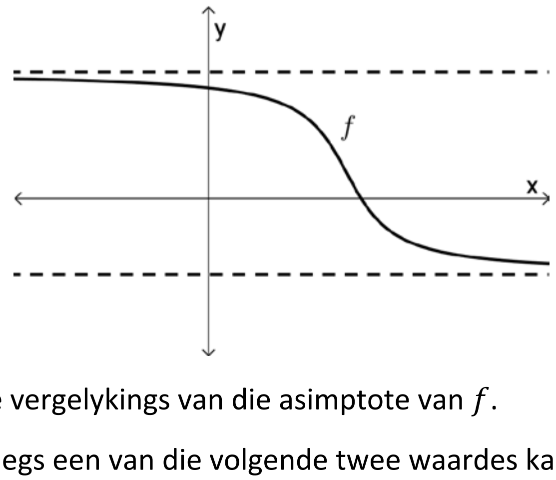
$$(1 + 2x)\sqrt{1 + 2x}$$ (5)

Vraag 3 [16 punte]

3.1 Voltooi die volgende:

Die inverse funksie kan slegs bepaal word indien dié funksie 'n ____ funksie is. (1)

3.2 Die skets toon die grafiek van $f(x) = a\ \mathrm{bgtan}(x + p) + \frac{\pi}{8}$



(a) Bepaal die vergelykings van die asimptote van f. (2)

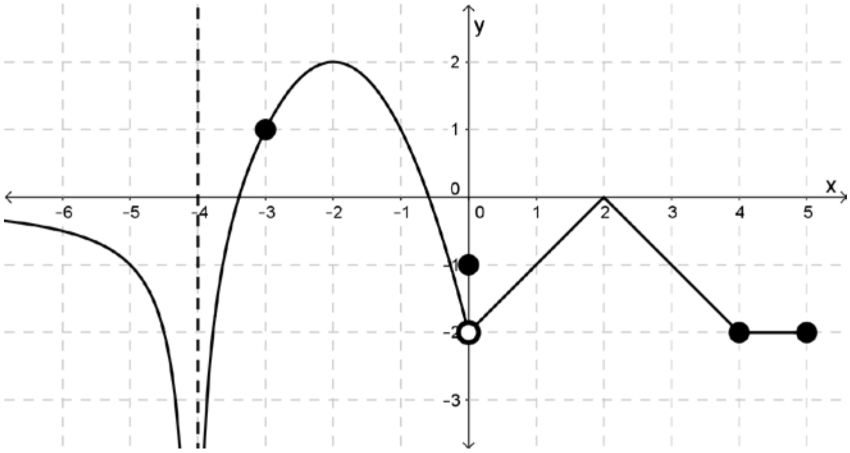
(b) Indien a slegs een van die volgende twee waardes kan wees, watter een beskryf die skets van f die beste:

$$a = +1 \text{ of } a = -1$$ (1)

(c) Bepaal vervolgens die waarde van p as die x-afsnit van f 4.414 is, korrek tot die naaste heelgetal. (3)

(d) <u>**Skryf**</u> die x-waarde neer waar f van konkawiteit verander. (1)

3.3 Die stuksgewyse funksie van f, is geskets hieronder. Die funksie het x-afsnitte by $x = -3.4$, $x = -0.6$ en $x = 2$. Die funksie het 'n **vertikale asimptoot** by $x = -4$.



(a) Watter tipe diskontinuïteit ontstaan by $x = -4$? (1)

Skryf die waarde(s) van x neer waarvoor die volgende bewerings sal geld:

(b) f is nie differensieerbaar nie, maar wel kontinu. (2)

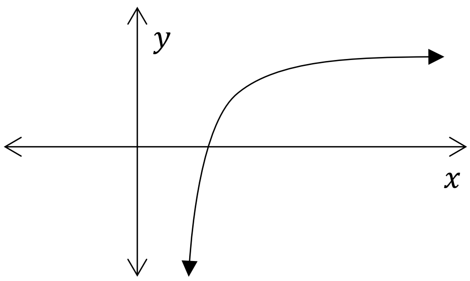
(c) Die limiet bestaan en die funksie waarde bestaan in die punt maar hulle is ongelyk. (1)

(d) $\dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0$ (2)

(e) $f(x) = f(x-1)$ waar $x \in \mathbb{Z}$ (2)

Vraag 4 [26 punte]

4.1 Die skets van $f(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{2}$ is hieronder geskets.



(a) Bepaal die:

(i) koördinate van die x-afsnit van f.

(ii) vergelyking van die asimptoot van f. (4)

(b) Skets vervolgens die grafiek van $y = |f(x)|$ op **DIAGRAMBLAD 1**. Dui alle afsnitte met die asse en asimptote duidelik aan op jou skets. (3)

(c) Skryf die waardeversameling van die inverse funksie van $f(x)$ neer. (1)

4.2 Los op vir $x \in \mathbb{R}$ in $\dfrac{|x-2|}{x+1} = -2x$ (7)

4.3 Gebruik Wiskundige Induksie en bewys dat die volgende bewering geld vir alle $n \in \mathbb{N}$, waar $n \geq 1$:

$$1.\ln x + 2.\ln x + 3.\ln x + \cdots + n.\ln x = \frac{n}{2}.\ln x^{n+1}$$

WENK: *maak gebruik van die ln-wette.* (11)

Vraag 5 [20 punte]

5.1 Gegee: $m_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ en $m_2 = -1 + i$.

(a) Skakel m_1 en m_2 om na poolvorm, $r\,\mathrm{cis}\,\theta$, waar r in wortelvorm, indien nodig, en $\theta > 0$ in terme van π gegee moet word. (4)

(b) Gebruik De Moivre se stelling en vervolgens toon aan dat

$$\left(\frac{m_1 \times m_2}{2i}\right)^4 = 64\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{3}$$ (5)

5.2 In die diagram is C 'n punt op OA en D is 'n punt op OB. OCD is 'n sektor, met middelpunt O, binne 'n driehoek AOB.

Die volgende afmetings is gegee:

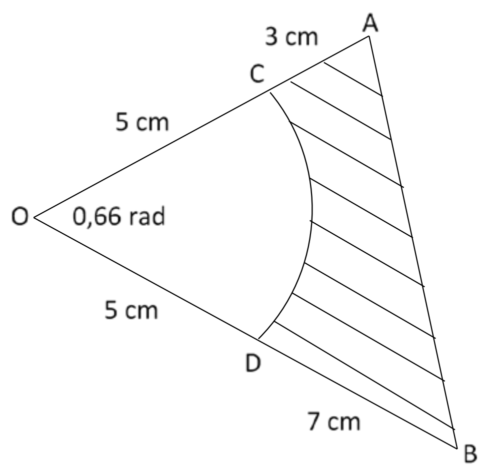
$\mathrm{OC} = \mathrm{OD} = 5$ cm

$\mathrm{AC} = 3$ cm

$\mathrm{BD} = 7$ cm

$\mathrm{A\hat{O}B} = 0{,}66$ radiale

ACDB is 'n gearseerde deel op die diagram.



(a) Bepaal die **oppervlakte** van die gearseerde deel. (5)

(b) Bepaal die **omtrek** van die gearseerde deel, korrek tot **EEN** desimale syfer. (6)

Vraag 6 [23 punte]

6.1 Gegee die funksie: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{4x - 1}$

(a) Bepaal die vergelyking van die vertikale- en skuins asimptoot van f. (4)

(b) Bereken die x-waarde(s) van die stasionêre punt(e) van f. (7)

(c) Gegee dat $f''(x) = \dfrac{100}{(4x - 1)^3}$

(i) Een van die stasionêre punte is by $x = \frac{3}{2}$. **Klassifiseer** hierdie stasionêre punt. (3)

(ii) Is die volgende stelling **WAAR** of **VALS**:
"$f(x)$ het 'n punt van infleksie / buigpunt." (1)

6.2 Teken 'n sketsgrafiek van 'n rasionale funksie, $f(x)$, met die volgende eienskappe. Dui alle afsnitte, draaipunte en asimptote duidelik aan op jou skets, indien daar genoeg inligting is. Gebruik **DIAGRAMBLAD 2** vir hierdie skets.

- f se definisieversameling is $x \in \mathbb{R}$; $x \neq 0$; $x \neq 2$ en $x \neq 4$
- f het slegs **EEN** stasionêre punt en **TWEE** x-afsnitte.
- $f(1) = 4$ $\quad f'(1) = 0$ $\quad f''(1) = 6$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$
- $f(-1) = f(3) = 0$
- f het 'n **verwyderbare** diskontinuïteit by $x = 4$ (8)

Vraag 7 [26 punte]

7.1 Bepaal die volgende *(dit is nie nodig om te vereenvoudig nie)*:

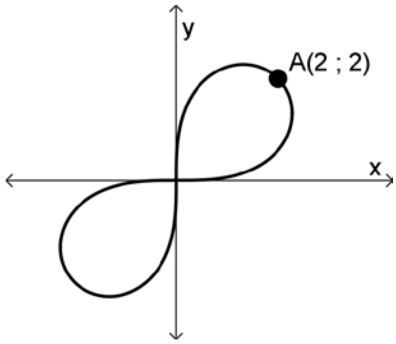
(a) $h'(x)$ as $h(x) = 9^{\sin x}$ (3)

(b) $\dfrac{d}{dx}\left[(x^3 - 2)^{10} \times \text{bgtan}\, x\right]$ (4)

(c) $\dfrac{dy}{dx}$ as $y = \log_4(x^2)$ (3)

7.2 Die "Limniscate of Bernoulli" is 'n aangepaste ellips, wat lyk soos die "infinity" teken. Die vergelyking van dié grafiek hieronder is:

$$(x^2 + y^2)^2 = 16xy$$



(a) Bepaal die waarde van $\frac{dy}{dx}$ in die punt A, deur van **implisiete differensiasie** gebruik te maak. (8)

(b) Indien $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2;2)} = -1$, bepaal die vergelyking van die **normaal** in die punt A. (3)

7.3 Gegee: $f(x) = 3x - \tan x$

Gebruik die Newton-Raphson-metode om een van die nulpunte van $f(x)$ te bepaal, korrek tot vyf desimale syfers. Gebruik $x_0 = 1.2$ as eerste benadering. (5)

Vraag 8 [22 punte]

8.1 Bepaal die volgende integrale:

(a) $\int \cot 2x \operatorname{cosec} 2x + (2x+1)^6 \; dx$ (4)

(b) $\int x.\sec^2 3x \; dx$ (8)

WENK: *faktor integrasie/stuksgewyse integrasie*

8.2 Gegee dat $\dfrac{36x^2+2x+60}{(9x^2+16)(x-2)} \equiv \dfrac{\text{A}}{9x^2+16} + \dfrac{\text{B}}{x-2}$

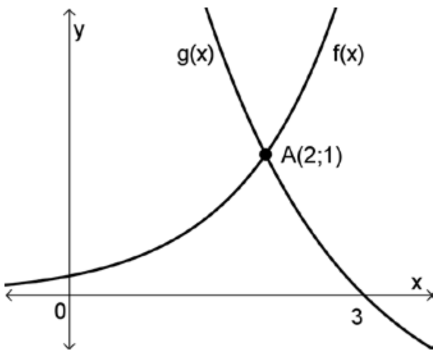
(a) Bepaal die waardes van A en B. (5)

(b) Bepaal vervolgens $\int \dfrac{36x^2+2x+60}{(9x^2+16)(x-2)} \; dx$ (5)

Vraag 9 [27 punte]

9.1 Gebruik ‘n oneindige Riemannsom en bereken die waarde van $\int_{-2}^{2} 2 + x^2 \; dx$ (11)

9.2 Bepaal die oppervlakte onder die funksies $f(x) = e^{x-2}$ en $g(x) = 2^{3-x} - 1$ en bo die x-as tussen die waardes $x = 0$ en $x = 3$. Die snypunt van f en g is, A$(2; 1)$.



(8)

9.3 Die volume van die omwentelingsliggaam wat ontstaan as die oppervlakte onder die funksie $y^2 = x^2\sqrt{x^3+1}$ om die x-as roteer tussen die punte $x = -1$ en $x = a$ is 6π. Bepaal die waarde van a. Wys alle berekeninge.
WENK: *substitusie-metode kan gebruik word.* (8)

- EINDE VAN DIE VRAESTEL -

Alpha Wiskunde Graad 12 - Rekord Eksamen 2017
ANTWOORDBLAD

Naam en Van: ____

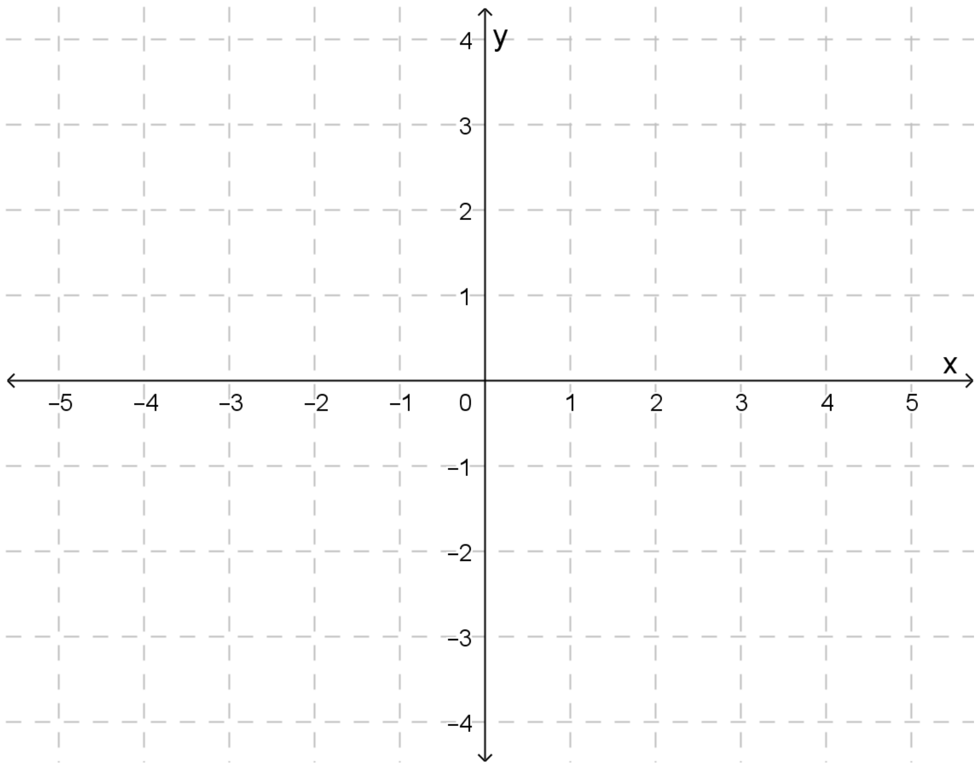
Vraag [Totaal]	1 [20]	2 [20]	3 [16]	4 [26]	5 [20]	6 [23]	7 [26]	8 [22]	9 [27]
Leerder punt									

TOTAAL 200

Vraag 1

1.1	A	B	C	D
1.2	A	B	C	D
1.3	A	B	C	D
1.4	A	B	C	D
1.5	A	B	C	D
1.6	A	B	C	D
1.7	A	B	C	D
1.8	A	B	C	D
1.9	A	B	C	D
1.10	A	B	C	D

DIAGRAMBLAD 1



DIAGRAMBLAD 2