

α -WISKUNDE

Alpha Wiskunde Rekord eksamenvraestel

10 September 2018

Graad 12



Leestyd: 10 min

Skryftyd: 3 ure

Totaal: 200 punte

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Hierdie vraestel bestaan uit 9 bladsye, 'n formuleblad van 3 bladsye en 'n antwoordblad van 2 bladsye.
2. Beantwoord AL tien vrae.
3. Nommer die antwoorde soos die vrae genommer is.
4. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word.
5. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
6. Alle noodsaaklike berekeninge moet duidelik getoon word, behalwe in vraag een. Geen punte sal toegeken word indien slegs die antwoord neergeskryf is nie.
7. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
8. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word indien nodig.
9. Skryf netjies en leesbaar.

Vraag 1**[20 punte]**

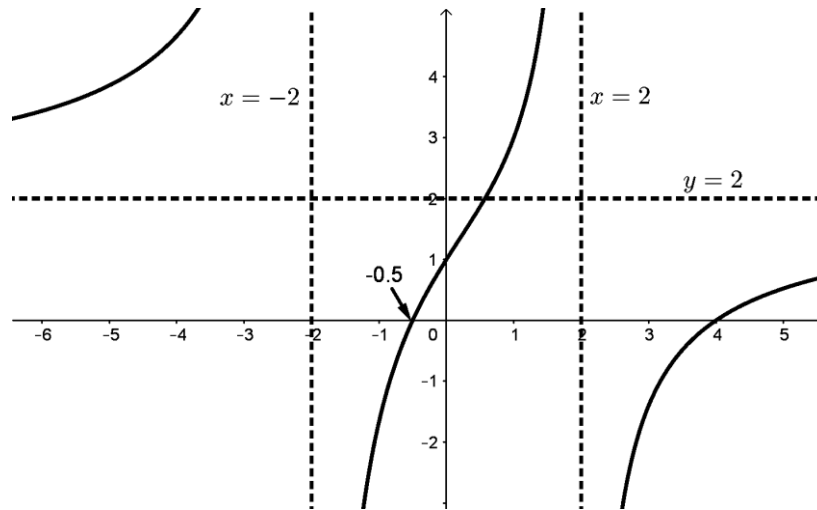
Hierdie vraag moet **op die antwoordblad** beantwoord word.

Elke vraag het **SLEGS** een korrekte antwoord en tel twee (2) punte. Merk die korrekte antwoord met 'n **X** op die Antwoordblad.

- 1.1 $x = \sqrt{3} - 2$ is 'n wortel van 'n polinoom. Watter van die volgende sal 'n faktor van die polinoom wees?
- (A) $x^2 + 4x + 1$
(B) $x^2 - 4x - 1$
(C) $x + 2 + \sqrt{3}$
(D) $x^2 + 4x - 1$
- 1.2 Die uitbreiding, met behulp van magreekse, van $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^{-10}$ sal geldig wees as
- (A) $|x| > 2$
(B) $|x| < \frac{1}{2}$
(C) $|x| < 2$
(D) $|x| > \frac{1}{2}$
- 1.3 As $f(x) = |x - 4| + 1$, dan is $f'(4) =$
- (A) -1
(B) 0
(C) 1
(D) Bestaan nie.
- 1.4 Watter een van die volgende is gelyk aan $\ln 4$?
- (A) $\ln 3 + \ln 1$
(B) $\frac{\ln 8}{\ln 2}$
(C) $\int_1^4 \ln x \, dx$
(D) $\int_1^4 \frac{1}{x} \, dx$
- 1.5 As $f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, waar $g(2) = 2$ en $g'(2) = 8$, dan is $f'(2) =$
- (A) 4
(B) 1.5
(C) 2
(D) 3.5

1.6 Die skets toon die grafiek van $f(x) = \frac{(ax+b)(x+c)}{x^2+d}$.

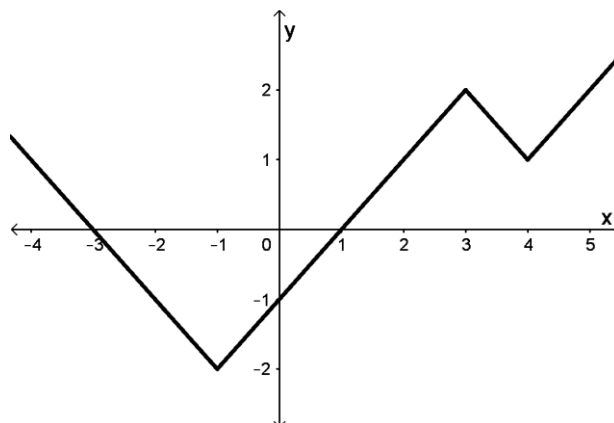
f het 'n vertikale asimptoot by $x = 2$ en $x = -2$ en 'n horisontale asimptoot by $y = 2$. f se x -afsnitte is by -0.5 en 4 .



Die waardes van c en d is

- (A) $c = 2$ en $d = 2$
- (B) $c = -\frac{1}{2}$ en $d = 2$
- (C) $c = -4$ en $d = -4$
- (D) $c = 4$ en $d = 4$

1.7 Die grafiek van f' , die afgeleide van f is geteken hieronder. Die funksie f het 'n lokale maksimum by $x =$



- (A) 3
- (B) -3
- (C) 1
- (D) 4

1.8 Gegee dat $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Vereenvoudig $x \cosh(\ln x)$.

- (A) $\frac{x^2+1}{2}$
- (B) 0
- (C) $\frac{x^2}{2}$
- (D) $\frac{x^2-1}{2}$

1.9 Gegee $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{as } x < 1 \\ \ln(3x - 2) & \text{as } x \geq 1 \end{cases}$.

Watter een van die volgende stellings oor f is waar?

- (i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 - (ii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$
 - (iii) f is differensieerbaar by $x = 1$
- (A) Slegs (ii) is waar.
 - (B) Slegs (i) is waar.
 - (C) Geeneen is waar nie.
 - (D) (i), (ii) en (iii) is waar.

1.10 Vereenvoudig $\frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^4}{(\cos \theta - i \sin \theta)^3}$

- (A) $\text{cis } \theta$
- (B) $\text{cis } 7\theta$
- (C) $\text{cis } 5\theta$
- (D) Geeneen van bogenoemde opsies nie.

Vraag 2**[28 punte]**

2.1 Gegee die funksie: $f(x) = -|x - 1| + 4$ en $g(x) = 2x + 4$.

(a) Los op vir $x \in \mathbb{R}$ as $f(x) = g(x)$. (6)

(b) Skets beide grafieke f en g op dieselfde assestelsel.

Gebruik **DIAGRAMBLAD 1** vir die skets. Toon duidelik alle afsnitte met die asse en die knakpunt aan op die skets, sowel as die antwoord van vraag 2.1(a) met die letter **A**. (6)

(c) Skryf vervolgens die waardes vir x waarvoor $-|x - 1| \geq 2x$ neer. (2)

2.2 Indien $1 - \sqrt{5}$ 'n nulpunt is van $P(x) = x^4 - 6x^2 - 12x - 8$, faktoriseer $P(x)$ volledig oor $\mathbb{C}[x]$. (8)

2.3 Die volgende stelsel vergelyking word gegee:

$$\begin{cases} 4x + y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

Deur gebruik te maak van Cramer se reël, toon aan dat die stelsel het nie 'n oplossing vir x , y en z nie. (6)

Vraag 3**[22 punte]**

3.1 Gebruik Wiskundige Induksie en bewys dat die volgende bewering geld vir alle $n \in \mathbb{N}$, waar $n \geq 1$:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1) \quad (11)$$

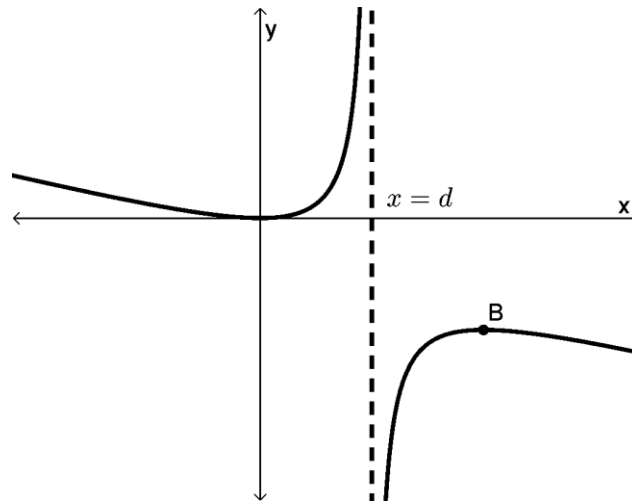
3.2 Die konstante term in die uitbreiding van $\left(\frac{x}{c} + \frac{2c}{x^2}\right)^{18}$ is 18564.

Bepaal die waarde van c as $c \in \mathbb{N}$. (6)

3.3 Bepaal die koëffisiënt van x^2 in die uitbreiding van $\sqrt{4 - 2x}$. (5)

Vraag 4**[15 punte]**

Gegee die funksie $f(x) = \frac{-x^2}{4x-6}$.



- 4.1 Skryf neer die waarde van d . (1)
- 4.2 Indien B die lokale maksimum draaipunt is van f , toon aan dat die x -koördinaat van B is 3. (6)
- 4.3 Bepaal die vergelyking van die skuins asimptoot. (4)
- 4.4 Skryf neer die vergelyking van die raaklyn aan die funksie in die punt $x = 0$. (2)
- 4.5 As $f(x) - k = 0$ geen reële oplossing het nie, bepaal die moontlike waardes vir k . (2)

Vraag 5**[20 punte]**

5.1 Gegee die komplekse getalle: $a = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{cis} \frac{2\pi}{3}$ en $b = -\sqrt{3} - i$.

- (a) Skakel b om na poolvorm. Gee die antwoord in terme van cis en π . (3)
- (b) Bepaal die waarde van $\frac{b}{a^6}$.

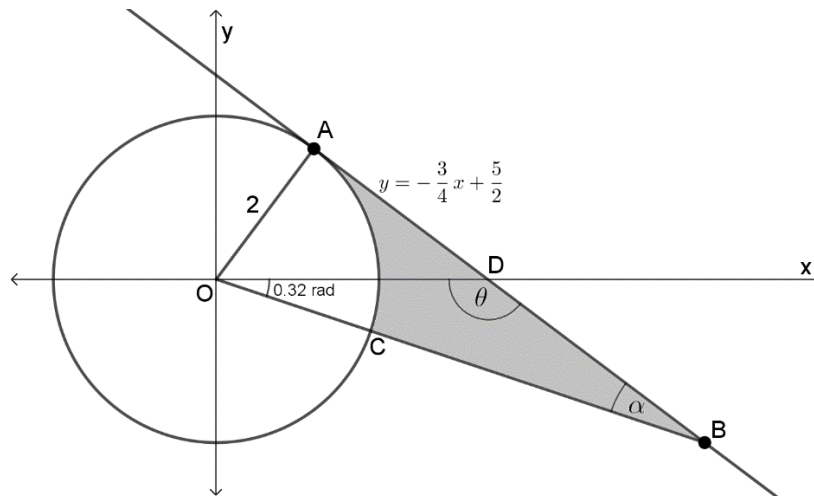
Laat die finale antwoord in die vorm $a\sqrt{b} + ai$ waar $a, b \in \mathbb{Z}$. (6)

5.2 Gegee: $f(x) = \begin{cases} e^{2x} \cdot \ln 4 & \text{as } x < 0 \\ \ln 4 & \text{as } x = 0 \\ -\ln\left(\frac{2x+1}{4}\right) & \text{as } x > 0 \end{cases}$

- (a) Bepaal of $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ bestaan. (4)
- (b) Is $f(x)$ kontinu by $x = 0$? Motiveer jou antwoord. Indien diskontinu, noem die tipe diskontinuiteit wat ontstaan by $x = 0$. (2)
- (c) Is $f(x)$ differensieerbaar by $x = 0$? Motiveer jou antwoord. (5)

Vraag 6**[23 punte]**

- 6.1 In die diagram is AB, met vergelyking $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$, 'n raaklyn aan die sirkel met middelpunt O. $\widehat{ABO} = \alpha$ radiale, $\widehat{DOC} = 0,32$ radiale en $\widehat{ODB} = \theta$ radiale. AO = 2 cm.



- (a) Toon aan die grootte van α is 0.32 radiale. (4)
- (b) Neem aan die grootte van \widehat{AOB} is 1.249 radiale. Bepaal vervolgens die oppervlakte van die gearseerde deel ADBC. (7)
- 6.2 Gegee die funksie $f(x) = 2 \operatorname{bgtan}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{2}$. Voltooi die volgende tabel: (5)

	Funksie: $f(x)$	Inverse funksie: $f^{-1}(x)$
Definisieversameling	(a)	(c)
Waardeversameling	(b)	(d)

- 6.3 Skets die funksie $y = \operatorname{bgcos}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{6}$. Toon alle afsnitte met die asse en koördinate van die eindpunte van die funksie duidelik aan. Gebruik **DIAGRAMBLAD 2** vir die skets. (7)

Vraag 7**[21 punte]**7.1 Gegee $y = \tan x - x$.

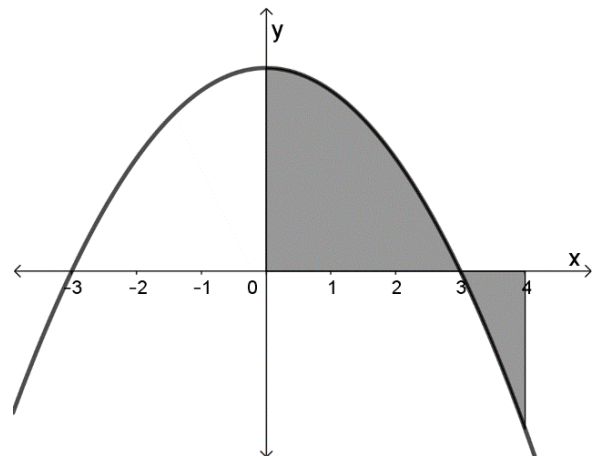
(a) Bepaal $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{d^2y}{dx^2}$. (4)

(b) Gebruik Newton se metode en bepaal vervolgens die waarde van die x -koördinaat van die draaipunt van $y = \tan x - x$ korrek tot vyf desimale syfers. Gebruik $x_1 = 3.2$ as eerste benadering. (5)

7.2 Bepaal $\frac{d}{dx}[(1 - 5x^2)^{10} \times \log_8 4x]$. (5)

7.3 Gebruik Implisiete differensiasie en bepaal $\frac{dy}{dx}$ in die punt $(0; \pi)$, die gradiënt van die raaklyn aan die funksie, van $2^{\sin x} + 4^{\sin y} = 10$. Laat finale antwoord in die vorm $\frac{\ln a}{\ln b}$. (7)**Vraag 8****[11 punte]**Gegee die skets van die funksie $f(x) = -x^2 + 9$.Gebruik 'n oneindige Riemannsom en bepaal die **oppervlakte** van die gearseerde deel, dit is die deel tussen f en die x -as, tussen $x = 0$ en $x = 4$, indien dit verder gegee word dat

$$\int_3^4 f(x) dx = -\frac{10}{3}.$$

**Vraag 9****[19 punte]**

Bepaal die volgende integrale:

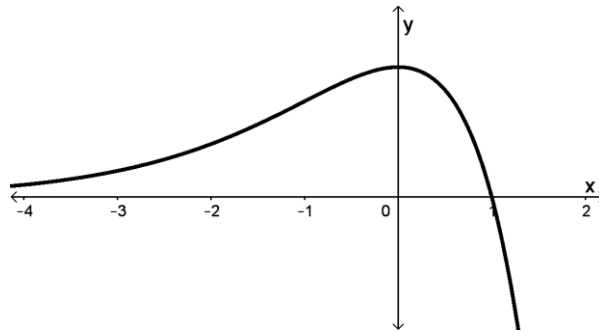
9.1 $\int \cos^2 4x dx$ (5)

9.2 $\int 9^{3x} + \frac{1}{(x+1)\ln 9} dx$ (4)

9.3 $\int \frac{x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} dx$ (**WENK:** Ontbind eers in parsieële breuke.) (10)

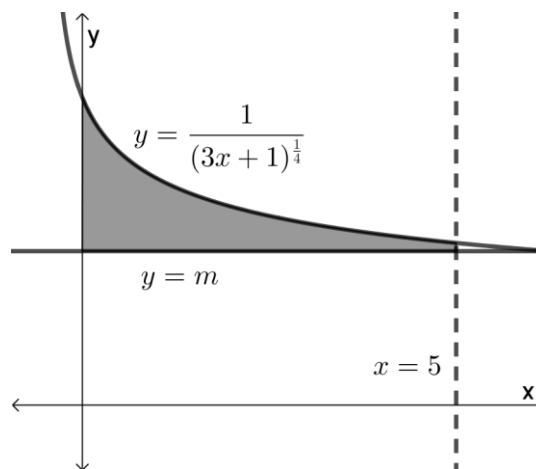
Vraag 10**[21 punte]**

10.1 Die onderstaande grafiek toon die funksie $f(x) = (1 - x)e^{x-1}$.



- (a) Bepaal die x -koördinaat van die buigpunt van die funksie.
Dit is nie nodig om aan te toon dat dit wel 'n buigpunt is nie. (7)
- (b) Bepaal die oppervlakte begrens deur die funksie f , die x -as en tussen $x = -1$ en $x = 1$. Laat jou antwoord in terme van e .
WENK: Gebruik faktor- of stuksgewyse integrasie. (8)

10.2 Die diagram toon 'n deel van die grafiek $y = \frac{1}{(1+3x)^{\frac{1}{4}}}$ en $y = m$ waar $m \in \mathbb{R}$.



Die volume van die omwentelingsliggaam wat ontstaan as die geskakeerde oppervlakte om die x -as roteer tussen $x = 0$ en $x = 5$ is $\frac{3\pi}{4}$.

Bepaal die waarde van m . (6)

- EINDE VAN DIE VRAESTEL -

Alpha Wiskunde Graad 12 - Rekord eksamen 2018

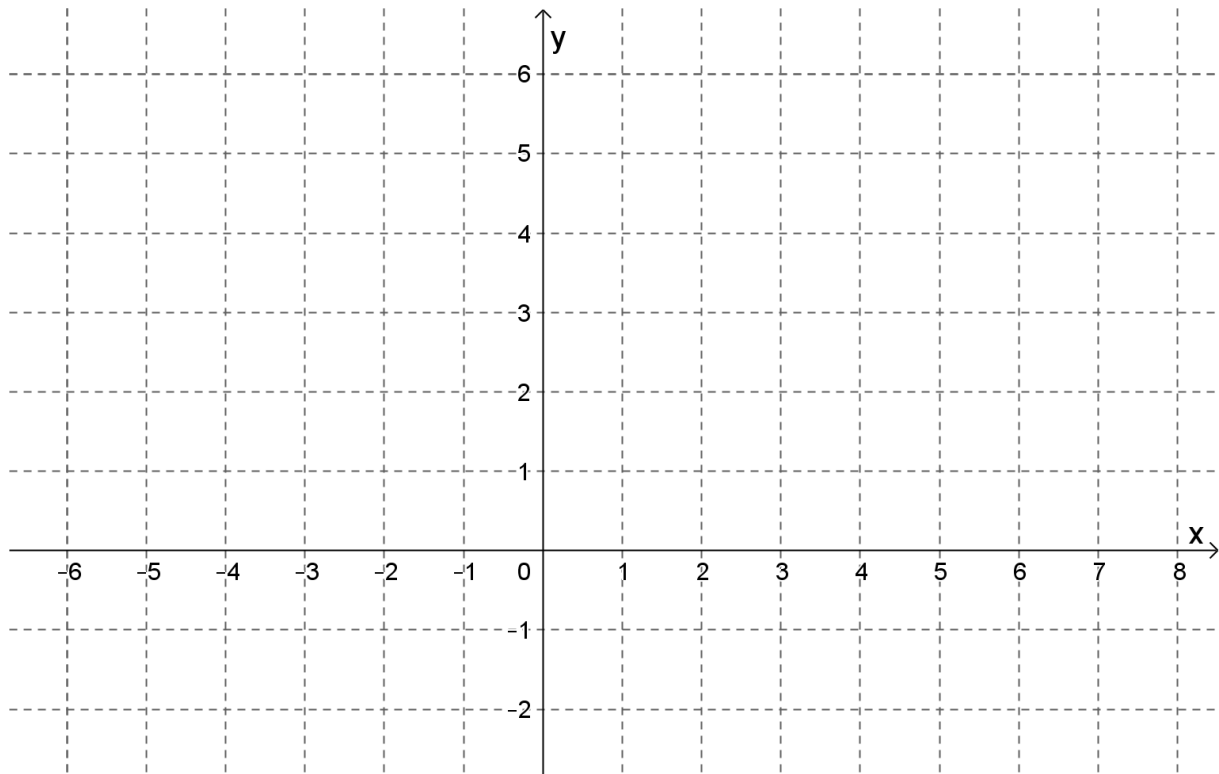
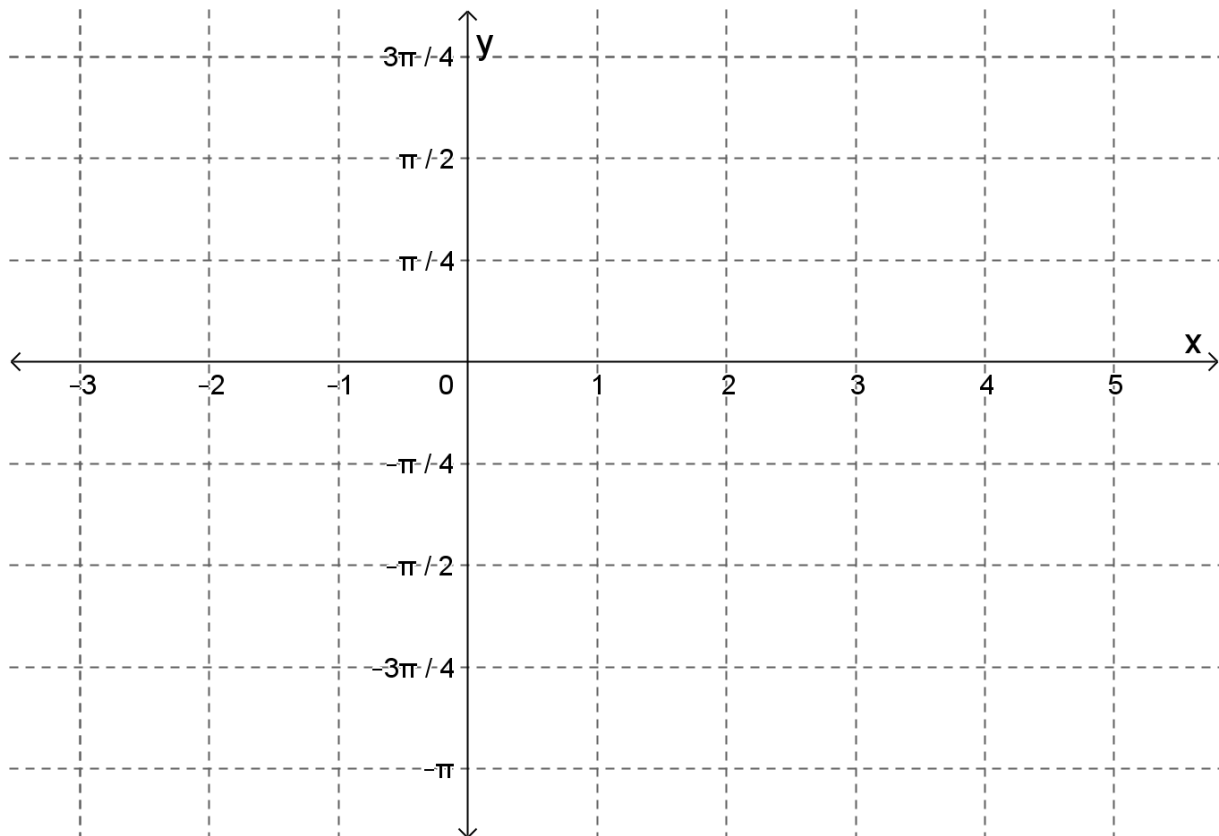
ANTWOORDBLAD

Naam en Van: _____

Vraag Totaal	1 [20]	2 [28]	3 [22]	4 [15]	5 [20]	6 [23]	7 [21]	8 [11]	9 [19]	10 [21]	TOTAAL 200
Leerder punt											

Vraag 1

1.1	A	B	C	D
1.2	A	B	C	D
1.3	A	B	C	D
1.4	A	B	C	D
1.5	A	B	C	D
1.6	A	B	C	D
1.7	A	B	C	D
1.8	A	B	C	D
1.9	A	B	C	D
1.10	A	B	C	D

DIAGRAMBLAD 1 [Vraag 2.1 (b)]**DIAGRAMBLAD 2 [Vraag 6.3]**

α -WISKUNDE

Alpha Wiskunde Graad 12 / *Alpha Mathematics Grade 12*

Rekord eksamen 2018 / *Preliminary examination 2018*

MEMORANDUM

Totaal / *Total*: 200 punte / *marks*

Eksaminator / *Examiner*: Hennie Botha

Moderator: Rika Grobler, Anna Muller

Hierdie memorandum bestaan uit 16 bladsye. /

This memorandum consists of 16 pages.

Vraag / Question 1

[20 punte / marks]

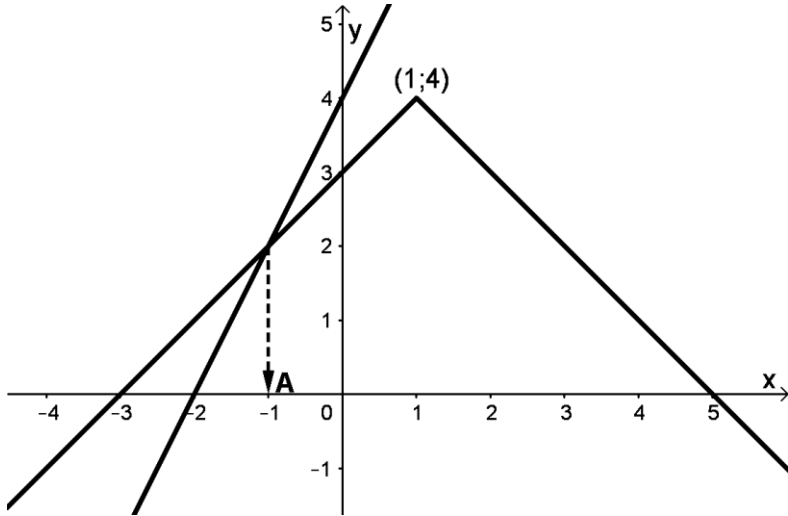
1.1	A	B	C	D
1.2	A	B	C	D
1.3	A	B	C	D
1.4	A	B	C	D
1.5	A	B	C	D
1.6	A	B	C	D
1.7	A	B	C	D
1.8	A	B	C	D
1.9	A	B	C	D
1.10	A	B	C	D

NR. NO	ANTWOORD ANSWER	BEREKENINGE (nie vir nasien doeleindes nie) CALCULATIONS (not for marking purpose)	PUNTE MARKS
1.1	A	$x = \sqrt{3} - 2$ 'n wortel is dan is $x = -\sqrt{3} - 2$ ook een. $(x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})$ $= (x + 2)^2 - 3$ $= x^2 + 4x + 1$ is 'n faktor.	2
1.2	C	$\left -\frac{x}{2} \right < 1 \Rightarrow x < 2$	2
1.3	D	Bestaan nie, want die afgeleide in die knakpunt van 'n absolute waarde grafiek bestaan nie. Absolute waarde grafiek is nie differensieerbaar in sy knakpunt nie.	2
1.4	D	$\int_1^4 \frac{1}{x} dx = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$	2
1.5	B	$f'(x) = \frac{g'(x)x^2 - g(x) \cdot 2x}{x^4}$ $f'(2) = \frac{8(4) - (2)(4)}{2^4} = \frac{3}{2} = 1.5$	2
1.6	C	$c = -4$ en $d = -4$	2

NR. NO	ANTWOORD ANSWER	BEREKENINGE (nie vir nasien doeleindes nie) CALCULATIONS (not for marking purpose)	PUNTE MARKS
1.7	B	Lokale maksimum is waar $f'(x) = 0$ en $f''(x) < 0$, m.a.w. as f' verander van positief na negatief. $\therefore x = -3$	2
1.8	A	$x \cosh(\ln x) = \frac{x(e^{\ln x} + e^{-\ln x})}{2} = \frac{x\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2} = \frac{x^2 + 1}{2}$	2
1.9	A	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(3x - 2) = 0$ $\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3 = 3$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{3x - 2} = 3$ $\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$	2
1.10	B	$\frac{(\text{cis } \theta)^4}{(\text{cis } (-\theta))^3} = \frac{\text{cis } 4\theta}{\text{cis } (-3\theta)} = \text{cis } 7\theta$	2

Vraag / Question 2

[28 punte / marks]

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
2.1 (a)	$- x - 1 + 4 = 2x + 4$ $ x - 1 = -2x$ <p>As $x \geq 1$:</p> $x - 1 = -2x$ $x = \frac{1}{3} \text{ (N.V.T.)}$ <p>As $x < 1$:</p> $x - 1 = 2x$ $x = -1$	<p>✓ Vereenvoudig</p> <p>✓ Voorwaardes</p> <p>✓ $x - 1 = -2x$</p> <p>✓ Antwoord $x = \frac{1}{3}$ (N.V.T.)</p> <p>✓ $x - 1 = 2x$</p> <p>✓ Antwoord $x = -1$</p> <p style="text-align: right;">[6 punte / marks]</p>
2.1 (b)	<p>$f(x) = - x - 1 + 4$ en $g(x) = 2x + 4$</p> <p>DIAGRAMBLAD 1:</p> 	<p>✓ Knakpunt (1; 4)</p> <p>✓ Vorm van f</p> <p>✓ x-afsnit van f by -3 en 5</p> <p>✓ y-afsnit van f by 3</p> <p>✓ x-afsnit van g by -2 en y-afsnit by 4</p> <p>✓ Punt A by $x = -1$ op die x-as en NIE by die snypunt nie.</p> <p style="text-align: right;">[6 punte / marks]</p>
2.1 (c)	$x \leq -1$	<p>✓✓ Antwoord</p> <p style="text-align: right;">[2 punte / marks]</p>
2.2	<p>$x = 1 + \sqrt{5}$ is ook 'n nulpunt.</p> $(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})$ $= (x - 1)^2 - 5$ <p>$= x^2 - 2x - 4$ is 'n faktor.</p> <p style="text-align: center;">OF / OR</p> $x = 1 \pm \sqrt{5}$ $(x - 1)^2 = (\pm\sqrt{5})^2$ <p>$x^2 - 2x - 4 = 0$ is 'n faktor.</p>	<p>✓ Twee hakies</p> <p>✓ Vermenigvuldig hakies uit</p> <p>✓ Faktor</p> <p>✓✓ Skryf korrek, kwadreer beide kante</p> <p>✓ Faktor</p>

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
	<p>Doen langdeling:</p> $P(x) = x^4 - 6x^2 - 12x - 8$ $= (x^2 - 2x - 4)(x^2 + 2x + 2)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$ </div> $= (x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x + 1 - i)(x + 1 + i)$	<p>✓✓✓ $x^2 + 2x + 2$</p> <p>✓ Eerste twee hakies</p> <p>✓ Laaste twee hakies</p> <p style="text-align: right;">[8 punte / marks]</p>
2.3	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$ $= 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$ $= 4(-6 + 3) - (9 + 1) - 2(-9 - 2)$ $= 0$ <p style="text-align: center;">OF / OR</p> $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$ $= 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ $= 4(-6 + 3) - 3(3 - 6) - (1 - 4)$ $= 0$ <p style="text-align: center;">OF / OR</p> <p>Let op indien die middelste ry/kolom gebruik word (-; +; -):</p> $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$ $= -(1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (+3) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ $= -1(9 + 1) - 2(12 - 2) + 3(4 + 6)$ $= 0$	<p>✓✓✓ Elke ko-faktor</p> <p>✓✓ Vermenigvuldig determinante uit</p> <p>✓ Antwoord 0</p> <p>✓✓✓ Elke ko-faktor</p> <p>✓✓ Vermenigvuldig determinante uit</p> <p>✓ Antwoord 0</p> <p>✓✓✓ Elke ko-faktor</p> <p>✓✓ Vermenigvuldig determinante uit</p> <p>✓ Antwoord 0</p> <p style="text-align: right;">[6 punte / marks]</p>

Vraag / Question 3

[22 punte / marks]

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
3.1	$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ <p>Stel / Let $n = 1$: LK = 1 RK = $\frac{1}{2}(3^1 - 1) = 1$</p> <p>∴ LK = RK ∴ bewering is waar vir / <i>statement is true for $n = 1$.</i></p> <p>Aanvaar die bewering is waar as / <i>Accept the statement is true for $n = k$:</i></p> $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{k-1} = \frac{1}{2}(3^k - 1)$ <p>Beskou / <i>Consider $n = k + 1$:</i></p> $\begin{aligned} \text{LK} &= 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{k-1} + 3^{k+1-1} \\ &= \frac{1}{2}(3^k - 1) + 3^k \\ &= \frac{3^k}{2} - \frac{1}{2} + 3^k \\ &= \frac{3 \cdot 3^k}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3^{k+1}}{2} \end{aligned}$ $\text{RK} = \frac{3^{k+1}}{2} - \frac{1}{2}$ <p>∴ LK = RK</p> <p>Die bewering is waar as $n = 1$. As die bewering waar is vir $n = k$, is dit ook waar vir $n = k + 1$. Dus is die bewering waar vir alle $n \in \mathbb{N}$. /</p> <p><i>The statement is true for $n = 1$. If the statement is true for $n = k$, it is also true for $n = k + 1$. Thus, the statement is true for all $n \in \mathbb{N}$.</i></p>	<p>✓ LK = RK = 1</p> <p>✓ Rede</p> <p>✓ Aanvaar...</p> <p>✓ Stelling met $n = k$</p> <p>✓ Eerste k terme</p> <p>✓ $(k + 1)$de term</p> <p>✓ Vervang eerste k terme met $\frac{1}{2}(3^k - 1)$</p> <p>✓ Vereenvoudig</p> <p>✓ Antwoord van LK</p> <p>✓ Antwoord van RK</p> <p>✓ Storie</p> <p style="text-align: right;">[11 punte / marks]</p>

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
3.2	$\binom{18}{r} \left(\frac{x}{c}\right)^{18-r} \left(\frac{2c}{x^2}\right)^r$ $= \binom{18}{r} x^{18-r} c^{-18+r} (2c)^r x^{-2r}$ $\therefore 18 - 3r = 0 \Rightarrow r = 6$ $\binom{18}{6} c^{-12} 2^6 c^6 = 18564$ $18564 \times 64 c^{-6} = 18564$ $c^{-6} = \frac{1}{64}$ $c = \pm 2$ $c = 2$	<p>✓ $\binom{18}{r}$</p> <p>✓ $\left(\frac{x}{c}\right)^{18-r}$</p> <p>✓ $\left(\frac{2c}{x^2}\right)^r$</p> <p>✓ $r = 6$</p> <p>✓ Vergelyking om vir c op te los</p> <p>✓ Antwoord $c = 2 \in \mathbb{N}$.</p> <p style="text-align: right;">[6 punte / marks]</p>
3.3	$(4 - 2x)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ <p>Term wat x^2 bevat is:</p> $2 \left(\frac{\binom{1}{2} \binom{1}{2} (-1)}{2!} \left(-\frac{x}{2}\right)^2 \right) = -\frac{1}{16} x^2$ <p>Koëffisiënt van x^2 is $-\frac{1}{16}$.</p>	<p>✓ Faktoriseer $4^{\frac{1}{2}} = 2$ uit</p> <p>✓ $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$</p> <p>✓ Vervang in formule in.</p> <p>✓ $-\frac{1}{16} x^2$</p> <p>✓ Antwoord. Slegs $-\frac{1}{16}$.</p> <p style="text-align: right;">[5 punte / marks]</p>

Vraag / Question 4

[15 punte / marks]

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
4.1	$d = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$	✓ Antwoord [1 punt / mark]
4.2	$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{-2x(4x - 6) + x^2(4)}{(4x - 6)^2} &= 0 \\ -8x^2 + 12x + 4x^2 &= 0 \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x - 3) &= 0 \\ x = 0 \text{ of } x = 3 \end{aligned}$ <p>Dus B se x-koördinaat is 3.</p>	✓ $f'(x) = 0$ ✓ $-2x(4x - 6)$ ✓ $x^2(4)$ ✓ Faktoriseer na $x(x - 3)$ ✓ $x = 0$ ✓ $x = 3$ [6 punte / marks]
4.3	$\begin{array}{r} -\frac{1}{4}x - \frac{3}{8} \\ 4x - 6 \overline{) -x^2 + 0x + 0} \\ \underline{-x^2 + \frac{3}{2}x} \\ \frac{3}{2}x \\ \underline{-\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}} \\ \phantom{-x^2 + \frac{3}{2}x} \frac{9}{4} \\ \phantom{-x^2 + \frac{3}{2}x} \underline{-\frac{9}{4}} \\ \phantom{-x^2 + \frac{3}{2}x} \end{array}$ <p>Skuins asimptoot is $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$</p>	✓ Metode ✓ Res $-\frac{9}{4}$ ✓ $-\frac{1}{4}x$ ✓ $-\frac{3}{8}$ [4 punte / marks]
4.4	$y = 0$	✓✓ Antwoord [2 punte / marks]
4.5	$0 < k < 3$	✓ $0 < k$ ✓ $k < 3$ [2 punte / marks]

Vraag / Question 5

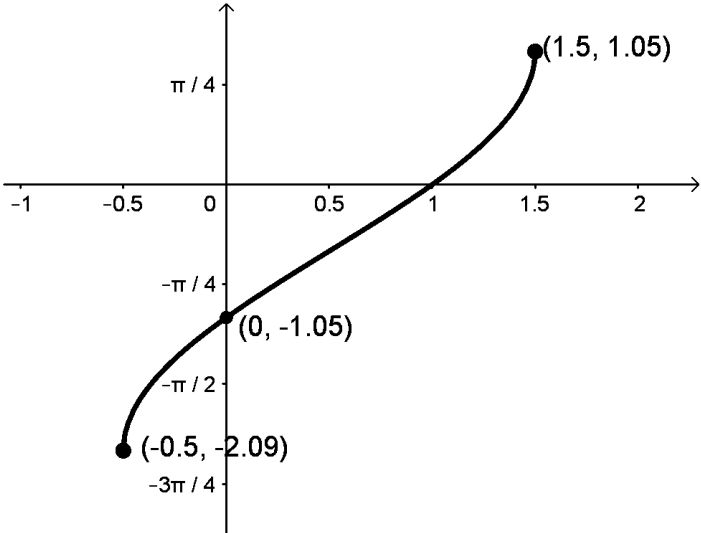
[20 punte / marks]

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
5.1 (a)	$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ OF / OR } \theta = -\frac{5\pi}{6}$ $r = \sqrt{3 + 1} = 2$ $b = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} \text{ OF / OR } b = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$	<p>✓ formule vir $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$</p> <p>✓ θ</p> <p>✓ r</p> <p style="text-align: right;">[3 punte / marks]</p>
5.1 (b)	$\frac{2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}\right)^6} = \frac{2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 \operatorname{cis} \left(6 \times \frac{2\pi}{3}\right)}$ $= \frac{2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}}{\frac{1}{27} \operatorname{cis} 4\pi} = 54 \operatorname{cis} \left(-\frac{17\pi}{6}\right)$ $x = 54 \cos \left(-\frac{17\pi}{6}\right) = -27\sqrt{3}$ $y = 54 \sin \left(-\frac{17\pi}{6}\right) = -27$ $\therefore -27\sqrt{3} - 27i$	<p>✓ De Moivre se stelling</p> <p>✓ $\frac{1}{27}$</p> <p>✓ 4π</p> <p>✓ $54 \operatorname{cis} \left(-\frac{17\pi}{6}\right)$</p> <p>✓ $-27\sqrt{3}$</p> <p>✓ -27</p> <p style="text-align: right;">[6 punte / marks]</p>
5.2 (a)	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} \cdot \ln 4 = \ln 4$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln \left(\frac{2x + 1}{4}\right) = -\ln \frac{1}{4} = -\ln 4^{-1} = \ln 4$ <p>∴ lim bestaan.</p>	<p>✓ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$</p> <p>✓ antwoord $\ln 4$</p> <p>✓ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$</p> <p>✓ antwoord $\ln 4$</p> <p style="text-align: right;">[4 punte / marks]</p>
5.2 (b)	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \ln 4$ <p>Ja die funksie is kontinu.</p>	<p>✓ $f(0) = \ln 4$</p> <p>✓ Gevolgtrekking</p> <p style="text-align: right;">[2 punte / marks]</p>
5.2 (c)	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2e^{2x} \ln 4 = 2 \ln 4$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2x + 1} \times \frac{1}{2} = -2$ <p>Dus die funksie is nie differensieerbaar nie, want</p> $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x).$	<p>✓ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$</p> <p>✓ antwoord $2 \ln 4$</p> <p>✓ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$</p> <p>✓ antwoord -2</p> <p>✓ Gevolgtrekking</p> <p style="text-align: right;">[5 punte / marks]</p>

Vraag / Question 6

[23 punte / marks]

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
6.1 (a)	Inklinasie hoek van AB is: $\tan(\pi - \theta) = \frac{3}{4}$ $\theta = 0,64$ $\alpha = \pi - 0,32 - 0,64 = 0,32 \text{ rad}$	✓ formule ✓ $\frac{3}{4}$ ✓ $\theta = 0,64 \text{ rad}$ ✓ $\pi - 0,32 - 0,64$ [4 punte / marks]
6.1 (b)	$\frac{AB}{\sin 1.249} = \frac{2}{\sin 0.32}$ $AB = 6.0315 \dots$ <p>Area $\Delta AOB = \frac{1}{2}(6.0315 \dots)(2) = 6.0315 \dots$</p> <p>Area sektor = $\frac{1}{2}(2)^2(1.249) = 2.498$</p> <p>Area van gearseerde deel is $6.0315 - 2.498 = 3.53$</p> <p style="text-align: center;">OF / OR</p> <p><i>(hierdie is regtig nie die kortste manier nie.)</i></p> $x^2 + y^2 = 4$ $x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}\right)^2 = 4$ $x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{25}{4} = 4$ $25x^2 - 60x + 36 = 0$ $x = \frac{6}{5}$ <p>$\therefore y = \frac{8}{5}$</p> <p>x-afsnit van $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ is $\left(3\frac{1}{3}; 0\right)$</p> <p>Dus $OD = 3\frac{1}{3} = BD$ (sye teenoor gelyke hoeke)</p> $AD = \sqrt{\left(3\frac{1}{3} - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(0 - \frac{8}{5}\right)^2} = 2\frac{2}{3}$ <p>Dus $AB = 3\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} = 6$</p> <p>Area $\Delta AOB = \frac{1}{2}(6)(2) = 6$</p> <p>Area sektor = $\frac{1}{2}(2)^2(1.249) = 2.498$</p> <p>Area van gearseerde deel is $6 - 2.498 = 3.50$</p>	✓ $\frac{AB}{\sin 1.249}$ ✓ $\frac{2}{\sin 0.322}$ ✓ Antwoord van AB ✓ Vervang korrek in formules ✓ Area van ΔAOB ✓ Area van sektor ✓ Antwoord ✓ $x = \frac{6}{5}$ ✓ OD ✓ Antwoord van AB ✓ Vervang korrek in formules ✓ Area van ΔAOB ✓ Area van sektor ✓ Antwoord [7 punte / marks]

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
6.2 (a)	$-\infty < x < \infty$ OF / OR $x \in (-\infty; \infty)$	✓ antwoord [1 punt / mark]
6.2 (b)	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $-2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} < y < 2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{3\pi}{2}$	✓ $-\frac{\pi}{2}$ ✓ $\frac{3\pi}{2}$ [2 punte / marks]
6.2 (c)	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$	✓ antwoord [1 punt / mark]
6.2 (d)	$-\infty < y < \infty$ OF / OR $y \in (-\infty; \infty)$	✓ antwoord [1 punt / mark]
6.3	<p>DIAGRAMBLAD 2:</p> 	✓ $\frac{3}{2}$ (x-koördinaat) ✓ 1.05 (y-koördinaat) ✓ $-\frac{1}{2}$ (x-koördinaat) ✓ -2.09 (y-koördinaat) ✓ y-afsnit by -1.05 ✓ x-afsnit by 1 ✓ vorm [7 punte / marks]

Vraag / Question 7

[21 punte / marks]

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
7.1 (a)	$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x - 1$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \sec x \cdot \tan x \sec x = 2 \sec^2 x \tan x$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ $\sec^2 x$ ✓ -1 ✓ $2 \sec x$ ✓ $\sec x \tan x$ <p style="text-align: right;">[4 punte / marks]</p>
7.1 (b)	$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$ $= x_n - \frac{\sec^2 x_n - 1}{2 \sec^2 x_n \tan x_n}$ $= x_n - \frac{\frac{1}{\cos^2 x_n} - 1}{\frac{2}{\cos^2 x_n} \cdot \tan x_n}$ <p> $x_1 = 3.14$ \vdots $x \approx 3.14159$ </p>	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Korrekte formule ✓ $\sec^2 x_n - 1$ of $\frac{1}{\cos^2 x_n} - 1$ ✓ $2 \sec^2 x_n \tan x_n$ of $\frac{2}{\cos^2 x_n} \cdot \tan x_n$ ✓✓ Finale antwoord <p style="text-align: right;">[5 punte / marks]</p>
7.2	$10(1 - 5x^2)^9(-10x) \log_8 4x + (1 - 5x^2)^{10} \frac{1}{4x \ln 8} \times 4$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ $10(1 - 5x^2)^9$ ✓ $(-10x)$ ✓ $\frac{1}{4x \ln 8}$ ✓ 4 ✓ Oorspronklike funksies in elke term geskei deur 'n plus teken. <p style="text-align: right;">[5 punte / marks]</p>
7.3	$2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x + 4^{\sin y} \cdot \ln 4 \cdot \cos y \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x}{4^{\sin y} \cdot \ln 4 \cdot \cos y}$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{(0;\pi)} = \frac{-2^{\sin 0} \cdot \ln 2 \cdot \cos 0}{4^{\sin \pi} \cdot \ln 4 \cdot \cos \pi} = \frac{-\ln 2}{-\ln 4} = \frac{\ln 2}{\ln 4}$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ $2^{\sin x}$ ✓ $\ln 2 \cdot \cos x$ ✓ $4^{\sin y}$ ✓ $\ln 4 \cdot \cos y \frac{dy}{dx}$ ✓ Uitdrukking vir $\frac{dy}{dx}$ ✓ Vervang $(0; \pi)$ in $\frac{dy}{dx}$ ✓ Vereenvoudig na $\frac{\ln 2}{\ln 4}$ <p style="text-align: right;">[7 punte / marks]</p>

Vraag / Question 8

[11 punte / marks]

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
8	$\Delta x_i = \frac{4}{n}$ $x_i = \frac{4}{n}i$ $f(x_i) = -\left(\frac{4}{n}i\right)^2 + 9 = -\frac{16}{n^2}i^2 + 9$ $f(x_i)\Delta x_i = -\frac{64}{n^3}i^2 + \frac{36}{n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{64}{n^3}i^2 + \frac{36}{n}\right)$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{36}{n} \sum_{i=1}^n 1\right]$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{64}{n^3} \times \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) + \frac{36}{n} \times n\right]$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{64}{3} + \frac{32}{n} + \frac{32}{3n^2} + 36\right]$ $= \frac{44}{3}$ $= 14.67 \text{ (twee desimale syfers / two decimal places)}$ <p>Oppervlakte is $\frac{44}{3} + \frac{10}{3} \times 2 = \frac{64}{3} = 21.\dot{3}$</p> <p style="text-align: center;">OF / OR</p> $\Delta x_i = \frac{3}{n}$ $x_i = \frac{3}{n}i$ $f(x_i) = -\left(\frac{3}{n}i\right)^2 + 9 = -\frac{9}{n^2}i^2 + 9$ $f(x_i)\Delta x_i = -\frac{27}{n^3}i^2 + \frac{27}{n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{27}{n^3}i^2 + \frac{27}{n}\right)$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{27}{n} \sum_{i=1}^n 1\right]$	<p>✓ Δx_i</p> <p>✓ x_i</p> <p>✓ $f(x_i)$</p> <p>✓ $f(x_i)\Delta x_i$</p> <p>✓ Vervang in formule</p> <p>✓ Vervang formule van $\sum_{i=1}^n i^2$</p> <p>✓ Vervang formule van $\sum_{i=1}^n 1$</p> <p>✓ Neig limiet na oneindig</p> <p>✓ Antwoord $\frac{44}{3}$ of 14.67</p> <p>✓ $+\frac{10}{3} \times 2$</p> <p>✓ Finale antwoord $\frac{64}{3}$ of 21.$\dot{3}$</p> <p>✓ Δx_i</p> <p>✓ x_i</p> <p>✓ $f(x_i)$</p> <p>✓ $f(x_i)\Delta x_i$</p> <p>✓ Vervang in formule</p>

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
	$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{27}{n^3} \times \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) + \frac{27}{n} \times n \right]$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{27}{3} + \frac{27}{2n} + \frac{27}{6n^2} + 27 \right]$ $= 18$ <p>Oppervlakte is $18 + \frac{10}{3} = \frac{64}{3} = 21.\dot{3}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Vervang formule van $\sum_{i=1}^n i^2$ ✓ Vervang formule van $\sum_{i=1}^n 1$ ✓ Neig limiet na oneindig ✓ Antwoord 18 ✓ $+\frac{10}{3}$ ✓ Finale antwoord $\frac{64}{3}$ of $21.\dot{3}$ <p style="text-align: right;">[11 punte / marks]</p>

Vraag / Question 9

[19 punte / marks]

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
9.1	$\int \cos^2 4x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) \, dx$ $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin 8x \cdot \frac{1}{8} + k$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Identiteit ✓ $8x$ ✓ $\frac{1}{2}x$ ✓ $\frac{1}{2} \sin 8x$ ✓ $\frac{1}{8}$ <p style="text-align: right;">[5 punte / marks]</p>
9.2	$\int 9^{3x} + \frac{1}{(x-1)\ln 9} \, dx$ $= 9^{3x} \cdot \ln 9 \cdot \frac{1}{3} + \log_9(x-1) + k$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ $\ln 9$ ✓ $9^{3x} \cdot \frac{1}{3}$ ✓ $\log(x-1)$ ✓ Grondtal 9 <p style="text-align: right;">[4 punte / marks]</p>
9.3	$\frac{x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$ $x^2 - x + 4 \equiv A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$ $\equiv Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$ $\equiv x^2(A + B) + Cx + 4A$ $\therefore 4A = 4 \Rightarrow A = 1$ $\therefore C = -1$ $\therefore A + B = 1 \Rightarrow B = 0$ $\int \frac{x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx - \int \frac{1}{x^2 + 4} \, dx$ $= \ln x - \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \, dx$ $= \ln x - \frac{1}{4} \operatorname{bgtan} \left(\frac{x}{2}\right) \times 2 + k$	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Ontbind in partiële breuke ✓ Vermenigvuldig en groepeer terme ✓ $A = 1$ ✓ $C = -1$ ✓ $B = 0$ ✓ $\ln x$ ✓ $\frac{1}{4}$ ✓ $\frac{x}{2}$ ✓ bgtan ✓ 2 <p style="text-align: right;">[10 punte / marks]</p>

Vraag / Question 10

[21 punte / marks]

NR. NO	ANTWOORD / ANSWER	PUNTE / MARKS
10.1 (a)	$f'(x) = -e^{x-1} + (1-x)e^{x-1}$ $f''(x) = -e^{x-1} - e^{x-1} + (1-x)e^{x-1}$ $f''(x) = 0$ $-e^{x-1} - e^{x-1} + (1-x)e^{x-1} = 0$ $-2e^{x-1} - xe^{x-1} = 0$ $e^{x-1}(2+x) = 0$ $e^{x-1} = 0 \text{ (N.V.T.) of } x = -2$	<p>✓✓ Elke term van f'</p> <p>✓ Eerste term van f''</p> <p>✓ Laaste twee terme van f''</p> <p>✓ $f''(x) = 0$</p> <p>✓ Vereenvoudig/Faktoriseer</p> <p>✓ Antwoord</p> <p style="text-align: right;">[7 punte / marks]</p>
10.1 (b)	$f(x) = 1 - x \quad g'(x) = e^{x-1}$ $f'(x) = -1 \quad g(x) = e^{x-1}$ $\int_{-1}^1 (1-x)e^{x-1} dx$ $= (1-x)e^{x-1} + \int e^{x-1} dx$ $= (1-x)e^{x-1} + e^{x-1} \Big _{-1}^1$ $= (0 + e^{-1}) - (2e^{-2} + e^{-2})$ $= e^{-1} - 3e^{-2}$	<p>✓ $f(x)$</p> <p>✓ $f'(x)$</p> <p>✓ $g'(x)$</p> <p>✓ $g(x)$</p> <p>✓ Vervang in formule</p> <p>✓ Integreer tweede term</p> <p>✓ Vervang grense in</p> <p>✓ Antwoord in terme van e</p> <p style="text-align: right;">[8 punte / marks]</p>
10.2	$V = \pi \int_0^5 \left(\frac{1}{(1+3x)^{\frac{1}{4}}} \right)^2 - m^2 dx$ $\frac{3\pi}{4} = \pi \int_0^5 (1+3x)^{-\frac{1}{2}} - m^2 dx$ $\frac{3}{4} = \left[\frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times 3} - m^2 x \right]_0^5$ $\frac{3}{4} = \frac{16^{\frac{1}{2}}}{3} - 5m^2 - \frac{2}{3}$ $m = \frac{1}{2}$	<p>✓ Vervang in formule</p> <p>✓ Kwadreer uit</p> <p>✓✓ Integreer elke term</p> <p>✓ Vervang grense in</p> <p>✓ Antwoord</p> <p style="text-align: right;">[6 punte / marks]</p>

- EINDE VAN DIE MEMORANDUM / END OF THE MEMORANDUM -