

# $\alpha$ -WISKUNDE

## Alpha Wiskunde FINALE EKSAMENVRAESTEL

21 Oktober 2019  
Graad 12

Tyd: 3 ure  
Totaal: 200 punte

### INSTRUKSIES EN INLIGTING

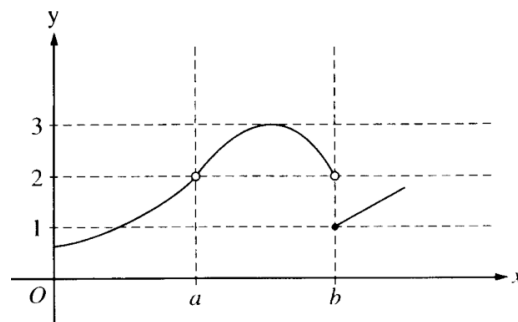
Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Beantwoord AL 10 vrae op hierdie vraestel.
2. Skryf jou naam en ID-nommer op die voorblad van die vraestel.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n spesifieke vraag.
4. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
5. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
6. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word waar van toepassing.
7. Hierdie vraestel bestaan uit 'n voorblad, 26 bladsye en 'n formuleblad van 3 bladsye.
8. Vraag 1 bestaan uit 10 meervoudigekeusevrae. Beantwoord dit op die antwoordblad. Hierdie antwoordblad is aan die voorkant van die vraestel. **Moet nie hierdie antwoordblad losmaak nie.**
9. Toon alle noodsaaklike berekeninge duidelik aan by elke vraag. Die korrekte antwoord op sigself sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Addisionele skryfspasie word aan die einde van die vraestel voorsien. Toon duidelik aan indien jy daarvan gebruik maak om 'n vraag te voltooi.
11. Skryf netjies en leesbaar.

**VRAAG 1 [20 PUNTE]**

- Beantwoord hierdie vraag **op die antwoordblad**, wat voor aangeheg is, deur telkens 'n X (kruisie) op A, B, C of D te maak.
- Moet asb. **NIE** hierdie bladsy losmaak van die vraestel nie.
- Hierdie vrae tel 2 punte elk.

1.1 Die skets toon die grafiek van 'n funksie  $f$ :



Watter van die volgende bewerings is waar vir  $f$ ?

- (A)  $f$  is kontinuu by  $x = a$                       (B)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$   
 (C)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$                                       (D)  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 1$

1.2 Die temperatuur in 'n kamer word gegee deur 'n vergelyking  $H(t)$  waar  $H$  die temperatuur in grade Celcius is,  $t$  minute nadat die lugreëling aangeskakel is. Watter van die volgende is die beste interpretasie vir  $H'(5) = 2$ ?

- (A) Die temperatuur in die kamer is  $2^\circ\text{C}$ , 5 minute na aanskakeling.  
 (B) Die temperatuur in die kamer neem toe met  $2^\circ\text{C}$  gedurende die eerste 5 minute.  
 (C) Die temperatuur in die kamer neem toe teen 'n konstante tempo van  $\frac{2}{5}^\circ\text{C}$  per minuut.  
 (D) Die temperatuur in die kamer neem toe met 'n tempo van  $2^\circ\text{C}$  per minuut, 5 minute na aanskakeling.

1.3 Watter van die volgende afleiers sal die waarde van een van die diskriminante wees wat gebruik word om die volgende stelsel vergelykings met behulp van Cramer se reël op te los?

$$\begin{aligned} x + 2y &= -4 \\ 3x - 2y &= 8 \end{aligned}$$

- (A) 4                      (B) -2                      (C) 20                      (D) 8

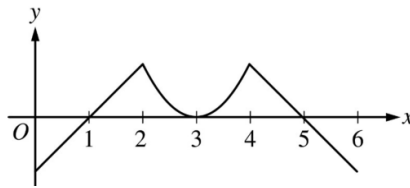
1.4 Indien die vektore  $2i + 3j - k$  en  $i + ak$  loodreg op mekaar is, sal die waarde van  $a =$

- (A) 2 (B) 5  
(C) -1 (D) Geeneen hiervan

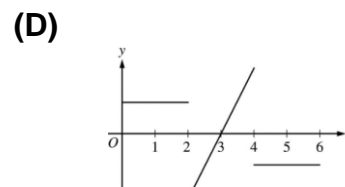
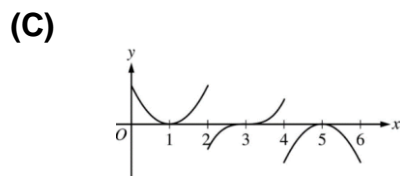
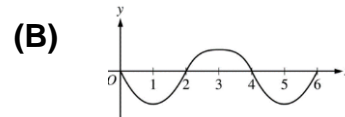
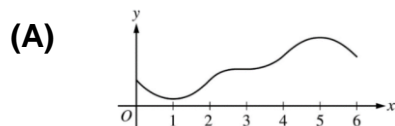
1.5  $\int_1^e \left(\frac{x^2-1}{x}\right) dx =$

- (A)  $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$  (B)  $\frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}$  (C)  $\frac{e^2}{2} - 2$  (D)  $\frac{e^2}{2} - e$

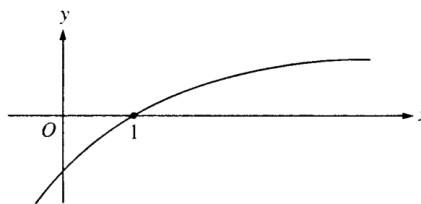
1.6 Die grafiek van  $y = f'(x)$ , die afgeleide van  $y = f(x)$ , word getoon.



Watter van die volgende kan 'n skets wees van die funksie  $y = f(x)$ ?



1.7 Die skets toon die grafiek van  $y = f(x)$  waarvoor  $f'$  en  $f''$  bestaan.



Watter bewering is waar?

- (A)  $f(1) < f'(1) < f''(1)$  (B)  $f(1) < f''(1) < f'(1)$   
(C)  $f'(1) < f(1) < f''(1)$  (D)  $f''(1) < f(1) < f'(1)$

1.8 As  $h(x) = f(g(x))$ , dan sal  $h''(x) =$

- (A)  $f''(g(x))g'(x) + f'(g(x))g''(x)$  (B)  $f''(g(x))[g'(x)]^2$   
(C)  $f''(g(x))[g'(x)]^2 + f'(g(x))g''(x)$  (D)  $f''(g(x))g''(x)$

1.9 Die vergelyking van die raaklyn aan die grafiek  $y = \cos(2x)$  by die punt  $x = \frac{\pi}{4}$  is:

(A)  $y - 1 = -(x - \frac{\pi}{4})$

(B)  $y = -2(x - \frac{\pi}{4})$

(C)  $y - 1 = -2(x - \frac{\pi}{4})$

(D)  $y = -(x - \frac{\pi}{4})$

1.10 As  $f$  'n kontinue funksie is en  $F'(x) = f(x)$  vir alle reële waardes van  $x$ , dan is  $\int_2^3 f(2x) dx =$

(A)  $2F(3) - 2F(2)$

(B)  $\frac{1}{2}F(3) - \frac{1}{2}F(2)$

(C)  $2F(6) - 2F(4)$

(D)  $\frac{1}{2}F(6) - \frac{1}{2}F(4)$

Beantwoord die volgende vrae **op die vraestel** op die lyne wat onderaan elke vraag voorsien is. Toon duidelik aan indien jy die addisionele skryfspasie aan die einde van die vraestel gebruik om 'n vraag te voltooi.

## VRAAG 2 [19 PUNTE]

2.1 Die verhouding van radioaktiewe koolstof-14 isotope (C-14) na  $t$  jaar op die aanvanklike hoeveelheid C-14 in 'n fossiel word gegee deur:  $\frac{A(t)}{A_0} = e^{\left(\frac{-1,21t}{10\,000}\right)}$ .

(a) Bereken die verhouding  $\left(\frac{A(t)}{A_0}\right)$  radioaktiewe C-14 in 'n fossiel na 1 000 jaar. (2)

(b) As die verhouding  $\left(\frac{A(t)}{A_0}\right)$  in 'n fossiel na  $t$  jaar 0,75 is, bepaal  $t$ . (3)

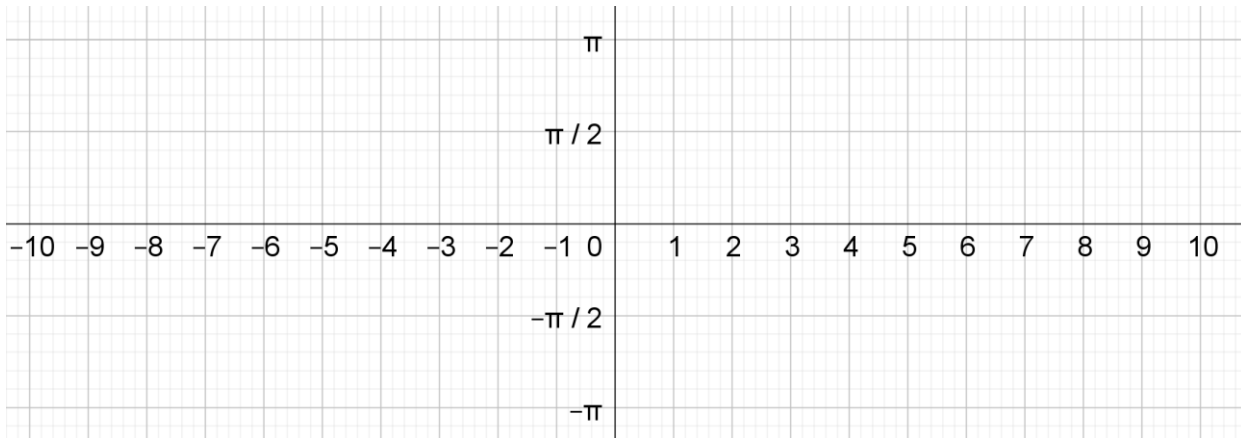
(c) Bepaal die halfleeftyd van koolstof-14, dit wil sê die tyd wat dit neem vir die radioaktiwiteit van koolstof-14 om te halveer.  
Rond die antwoord af tot die naaste tien. (3)

2.2 Los op vir  $x$ :  $|2x + 6| = -2x + 3$  (6)

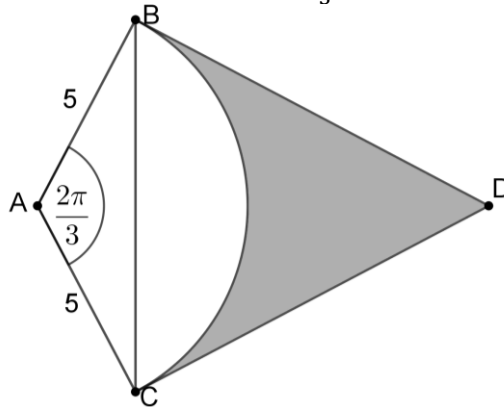
2.3 Gebruik die binomiaalstelling en bepaal die term in die uitbreiding van  $\left(\frac{x^3}{2} - \frac{2}{x}\right)^8$  wat onafhanklik van  $x$  is. (5)

**VRAAG 3 [21 PUNTE]**

- 3.1 Teken 'n netjiese sketsgrafiek van  $f(x) = b \tan(2x) - \frac{\pi}{4}$ .  
Toon duidelik alle afsnitte met die asse asook asimptote op jou grafiek aan. (5)



- 3.2 In die diagram is BD en CD raaklyne aan 'n sirkel met middelpunt A.  
AB en AC is radiusse met lengte 5.  $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$  radiale.



- (a) Toon aan dat  $BD = CD = 5\sqrt{3}$ . (3)
- (b) Bereken die oppervlakte van die gearseerde gedeelte, met  $BD = CD = 5\sqrt{3}$ . (4)
- 3.3 (a) Skryf  $-\sqrt{3} + i$  in poolvorm. Die hoek moet in terme van  $\pi$  gegee word. (4)
- (b) Bereken vervolgens die waarde van  $\frac{(-\sqrt{3}+i)^{12}}{32 \operatorname{cis}(\frac{\pi}{3})}$ .  
Gebruik de Moivre se stelling en gee jou antwoord steeds in poolvorm. (3)
- (c) Skakel die antwoord om na reghoekvorm. (2)

**VRAAG 4 [18 PUNTE]**

- 4.1 (a) Gee 'n voorwaarde waaronder 'n  $n^{\text{de}}$ -graadse polinoom in  $\mathbb{Q}[x]$  minstens een reële wortel sal hê. Motiveer jou antwoord. (2)
- (b) Gegee  $P(x) = x^4 + 2x^3 + 18x^2 + 2x + 17$  met wortel  $x = -1 + 4i$ . Bepaal die reële wortels van  $P$ , indien enige. (6)
- 4.2 Gebruik wiskundige induksie sowel as die formules vir saamgestelde hoeke en bewys De Moivre se stelling as  $r = 1$ . Dus bewys dat  $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ . (10)

**VRAAG 5 [21 PUNTE]**

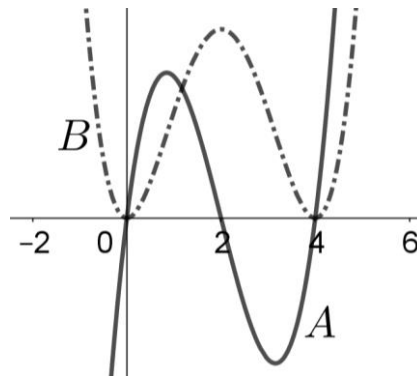
- 5.1 Gegee vektore  $\mathbf{u} = (1; a; 4)$  en  $\mathbf{v} = (4; -1; -1)$ . Die afstand tussen die eindpunte van die vektore is  $5\sqrt{2}$ . Bereken die waarde van  $a$  indien  $a < 0$ . (4)
- 5.2 Gegee die vektore  $\mathbf{a} = (1; 3; 5)$ ,  $\mathbf{b} = (2; -1; 0)$  en  $\mathbf{c} = (-3; 0; 1)$ .
- (a) Bepaal die hoek tussen  $\mathbf{a}$  en die  $z$ -as. (3)
- (b) Bepaal die oppervlakte van die parallelogram wat deur  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{c}$  gevorm word. (5)
- (c) Bepaal die hoek tussen  $\mathbf{a} = (1; 3; 5)$  en  $\mathbf{b} = (2; -1; 0)$ . (4)
- 5.3 Die eigenwaardes  $k$  van 'n matriks  $A$  kan bepaal word met die determinant vergelyking:  $|A - kI| = 0$  waar  $I$  die identiteitsmatriks  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  vir 'n  $2 \times 2$  matriks is. Bepaal die eigenwaarde(s)  $k$  van die matriks  $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$ . (5)

**VRAAG 6 [19 PUNTE]**

- 6.1 Los op vir  $a$  en  $b$  as  $f$  differensieerbaar is vir alle reële waardes van  $x$ , met (6)
- $$f(x) = \begin{cases} ax + 2b - 4 & \text{as } x \leq 2 \\ bx^2 - ax + a & \text{as } x > 2 \end{cases}$$
- 6.2 Differensieer die volgende funksies soos gevra. Die antwoorde hoef nie vereenvoudig te word nie.
- (a) Bepaal  $f'(x)$  as  $f(x) = \log(x^2) \times \text{bgtan}(2x)$ . (5)
- (b)  $D_x[\cos\sqrt{x}]$ . (3)
- (c) Gebruik implisiete differensiasie en bepaal  $\frac{dy}{dx}$  as  $e^y = 2^{xy}$ . (5)

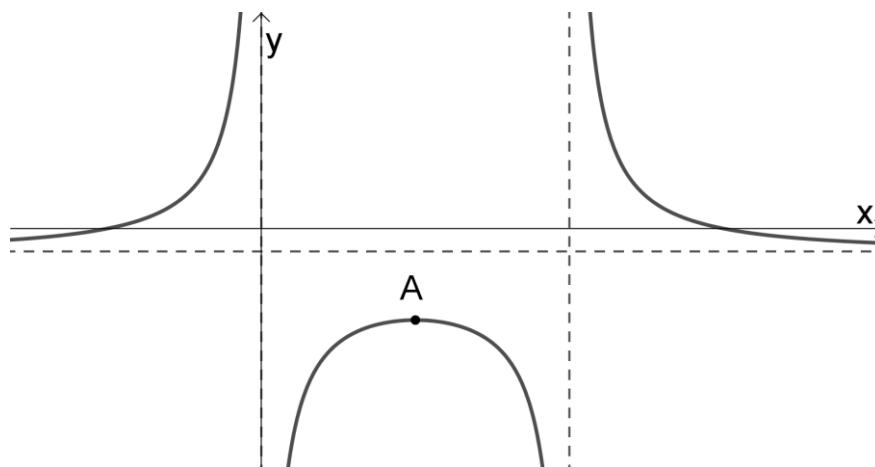
**VRAAG 7 [21 PUNTE]**

7.1 Die volgende grafiek toon die skets van  $y = f'(x)$  en  $y = f''(x)$ , die eerste en tweede afgeleide van  $f$ .

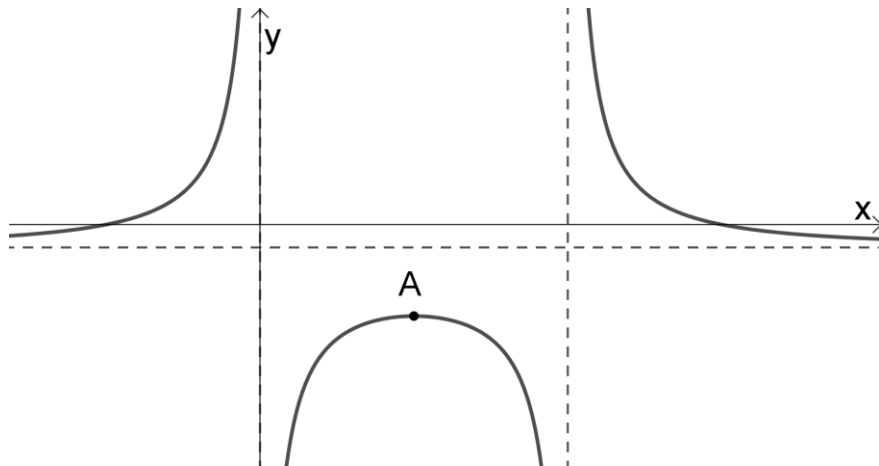


- (a) Watter van die grafieke, A en B, is die grafieke van  $f'(x)$  en  $f''(x)$ ? (2)
- (b) Gee die  $x$ -waarde(s) van die infleksiepunt(e) van  $f$ .  
Motiveer jou antwoord. (3)
- (c) Gee die  $x$ -waarde(s) van infleksiepunt(e) wat ook stasionêre van  $f$  is. Motiveer jou antwoord. (2)

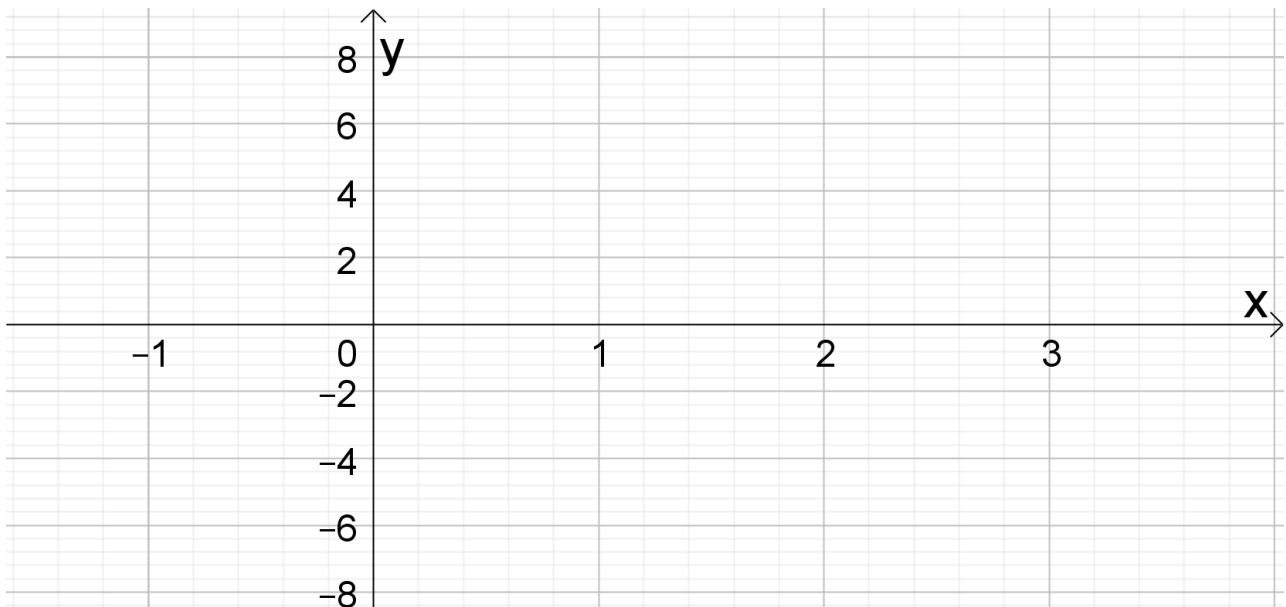
7.2 Die skets toon die grafiek van  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - x^2}$ .



- (a) Bepaal die vergelykings van alle asimptote van  $f$ . (3)
- (b) Die grafiek het een maksimum draaipunt by A.  
Bepaal die koördinate van A. (6)



- (c) Teken 'n netjiese sketsgrafiek van  $g(x) = \left| \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - x^2} \right|$ .  
Toon duidelik alle afsnitte met die asse, asimptote en die  
koördinate van die draaipunt aan. (5)



**VRAAG 8 [20 PUNTE]**

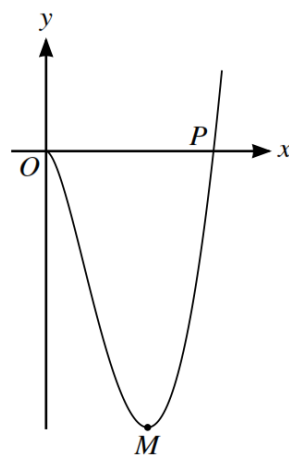
8.1 Bepaal die volgende integrale:

(a)  $\int (\cot^2 2x + \cos^2 x) dx$  (5)

(b)  $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 - 4x}}$  (5)

8.2 (a) Ontbind  $\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$  in parsieë breuke. (5)

(b) Bepaal **vervolgens** die waarde van  $A$  indien  $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \ln A$ . (5)

**VRAAG 9 [22 PUNTE]**9.1 (a) Gebruik 'n Riemansom en bepaal  $\int_0^2 x(x - 2) dx$ . (9)(b) Bepaal nou die oppervlakte tussen  $y = x(x - 2)$  en die  $x$ -as. (1)9.2 Die grafiek van  $y = e^x$  roteer om die  $x$ -as. Die volume van die omwentelingsliggaam wat so gevorm word tussen die  $y$ -as en die lyn  $x = \ln(p)$  met  $p > 0$ , is gelyk aan  $\frac{15\pi}{2}$ . Bepaal die waarde van  $p$ . (6)9.3 Die grafieke van  $y = x - 2$  en  $y = \cot\left(-\frac{x}{2}\right)$  sny mekaar tussen  $x = 5$  en  $x = 6$ . Gebruik Newton se metode en bepaal hierdie snypunt korrek tot vier desimale syfers. Toon duidelik aan hoe jy Newton se metode gebruik. (6)**VRAAG 10 [19 PUNTE]**10.1 Die skets toon die grafiek van  $y = 3x^2 \ln \frac{x}{6}$ .Toon aan dat die gradiënt van die grafiek by die punt  $P$ , die  $x$ -afsnit van die grafiek, gelyk is aan drie maal die waarde van hierdie  $x$ -afsnit. (7)

10.2 (a) Toon aan dat  $\frac{d}{dx}(x - \text{bgtan}x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ . (3)

(b) Bereken **vervolgens**  $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \text{bgtan}x \, dx$ . Gee die antwoord in terme van  $\pi$  en gebruik wortelvorm indien nodig. Gebruik faktorintegrasië. (9)