

# $\alpha$ -WISKUNDE

## Alpha Wiskunde Rekord eksamenvraestel

**Augustus 2019**

**Tyd: 3 ure**

**Graad 12**

**Totaal: 200 punte**

**Eksaminator: Me R Grobler**

**Moderator: Me A Muller**

### **INSTRUKSIES EN INLIGTING**

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Beantwoord AL 10 vrae op die vraestel.
2. Skryf jou naam en ID-nommer voor op die antwoordblad.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n vraag.
4. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
5. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
6. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word indien nodig.
7. Hierdie vraestel bestaan uit 8 bladsye en 'n formuleblad van 3 bladsye. Daar is ook 'n antwoordblad van 2 bladsye.
8. Vraag 1 bestaan uit 10 meervoudigekeusevrae. Beantwoord dit op die antwoordblad.
9. Toon alle noodsaaklike berekeninge duidelik aan by elke vraag. Die korrekte antwoord alleen sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Skryf netjies en leesbaar.

**Vraag 1****[20 punte]**

Beantwoord hierdie vraag **op die antwoordblad** deur telkens 'n X (kruisie) op A, B, C of D te maak. Elke vraag tel 2 punte.

1.1 Vir watter waarde(s) van  $x$  is  $-\frac{6}{|x-2|} \leq 3$ ?

- (A) Geen reële waardes nie  
 (B)  $x < 4$  of  $x > 0$   
 (C)  $-4 < x < 4$   
 (D)  $x \in \mathbb{R}, x \neq 2$

1.2 Watter van die volgende grafieke het 'n asimptoot  $y = 1$ ?

- (A)  $y = \ln x - 1$  (B)  $y = \frac{x}{(x+1)}$  (C)  $y = e^x$  (D)  $y = e^{x-1}$

1.3 Die grafiek van  $y = b \tan(x + 2) - \frac{\pi}{2}$  het 'n horisontale asimptoot by

- (A)  $x = 0$  (B)  $x = \pi$  (C)  $x = 2$  (D)  $x = -2$

1.4 Vir 'n kontinue en differensieerbare funksie  $y = f(x)$  geld die volgende:

$f'(4) = 0$  en  $f''(4) = 2$ . Watter stelling is waar:  $f$  het 'n ... by  $x = 4$ :

- (A) buigpunt/ infleksie punt (B) maksimum draaipunt  
 (C) minimum draaipunt (D)  $x$ -afsnit

1.5 Wat is die waarde van  $r$  in die uitbreiding van  $\left(4x - \frac{2}{x}\right)^8$  indien die koëffisiënt van  $x^2$  bepaal moet word?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

1.6 Die funksie  $f$  is as volg gedefinieerd:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

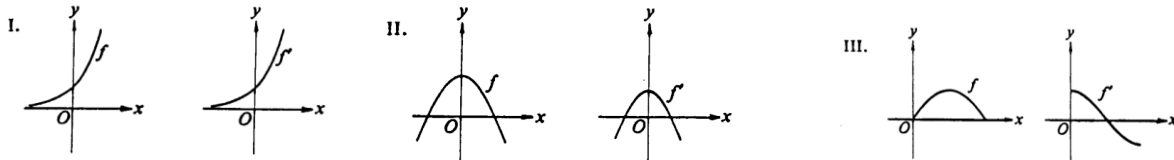
Vir watter waarde van  $x$  is  $f$  NIE kontinuu nie:

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) geen een nie

1.7 As  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$ , watter bewering is waar:

- (A)  $f$  is kontinu by  $x = 3$ . (B)  $f$  is differensieerbaar by  $x = 3$ .  
 (C)  $f(3) = 7$ . (D) Nie A. B of C is waar nie.

1.8 Watter van die volgende pare grafieke kan die grafiek van die funksie **SOWEL AS** die grafiek van die afgeleide van die funksie voorstel:



- (A) Net I (B) Almal  
 (C) I en II (D) I en III

1.9 As  $f(x) = g(x) + 7$  vir  $3 \leq x \leq 5$ , dan sal  $\int_3^5 [f(x) + g(x)] dx =$ :

- (A)  $\int_3^5 g(x) dx + 7$  (B)  $2 \int_3^5 g(x) dx + 7$   
 (C)  $2 \int_3^5 g(x) dx + 14$  (D)  $2 \int_3^5 g(x) dx$

1.10 Gegee dat  $f(2) = 1$  en  $f'(2) = 2$ . Die funksie  $f$  is differensieerbaar vir alle reële waardes van  $x$ . Bepaal die afgeleide van  $\ln(f(x))$  by  $x = 2$ .

- (A) 1 (B) 2 (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{\ln 2}$

**Vraag 2****[20 punte]**

2.1 'n Nuwe yskas word aangeskakel. Die temperatuur binne die yskas kan bepaal word met die vergelyking:

$$T(t) = ae^{-\frac{t}{2}} + 6$$

waar  $T$  die die temperatuur in  $^{\circ}\text{C}$  binne die yskas is  $t$  ure nadat dit aangeskakel is.

(a) Die aanvanklike temperatuur binne die yskas is  $18^{\circ}\text{C}$ . Bereken die waarde van  $a$ . (2)

(b) Bereken die temperatuur in die yskas na 2 ure. Gebruik die waarde  $a = 12$ . (2)

(c) Bereken na hoeveel ure die yskas 'n temperatuur van  $7^{\circ}\text{C}$  sal bereik. Gee die antwoord as 'n heelgetal. (4)

(d) Wat is die minimum temperatuur wat die yskas kan bereik? (1)

2.2 Die funksie  $f(x) = 3x^3 - 11x^2 - 2x + 20$  het 'n nulpunt by  $x = 1 + \sqrt{5}$ . Bepaal die rasionale  $x$ -afsnit van die grafiek van  $f$ . (5)

2.3 Brei  $\frac{1}{\sqrt[3]{1+3x}}$  uit met behulp van die magreeks tot vier terme. Vereenvoudig jou antwoord. (6)

**Vraag 3****[16 punte]**

3.1 (a) Gegee dat  $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ . Skryf  $z$  in poolvorm as  $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ . Gebruik wortelvorm en  $\pi$  indien nodig. (2)

(b) Bepaal vervolgens  $z - \frac{1}{z}$  in poolvorm deur gebruik te maak van de Moivre se stelling. (4)

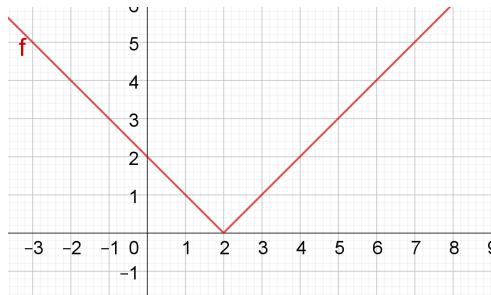
(c) Skakel die antwoord om na reghoekvorm. (1)

3.2 Gebruik **wiskundige induksie** en bewys dat

$$(1 \times 0) + (2 \times 1) + (3 \times 2) + \dots + n(n-1) = \frac{n(n^2-1)}{3} \quad (9)$$

**Vraag 4****[21 punte]**

- 4.1 (a) Doen hierdie vraag op die skets op die antwoordblad.  
Die volgende skets toon die grafiek van  $f(x) = |x - 2|$ .



Skets op dieselfde assestelsel die grafiek van  $g(x) = -|x - 3| + 3$ .

Toon duidelik die afsnitte met die asse en die koördinate van die knakpunt aan. (6)

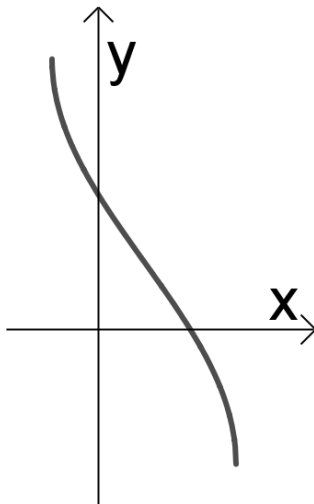
- (b) Gebruik die skets en gee die waardes van  $x$  waarvoor  $f(x) \leq g(x)$ . (2)

- 4.2 Gegee die stelsel vergelykings:

$$ax + y = 8 \text{ en } 3x + 2ay = 15 \text{ met oplossing } y = 9 \text{ en } a \text{ 'n heelgetal.}$$

Gebruik Cramer se metode en bepaal die waarde van  $a$ . Toon baie duidelik met watter determinante jy werk en hoe jy Cramer se metode gebruik. (6)

4.3



Die skets toon die grafiek van  $f(x) = 2b \cos\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{2\pi}{3}$ .

Bereken die afsnitte van die grafiek met die asse asook die koördinate van die eindpunte.

Gee die antwoorde in terme van  $\pi$  indien nodig. (7)

**Vraag 5****[19 punte]**

- 5.1 Gegee vektore  $\vec{a} = 2i - 4j - 3k$  en  $\vec{b} = -i - 2j + 5k$ .

(a) Bepaal die groottes van beide vektore. (3)

(b) Gebruik die puntproduk en bepaal die hoek tussen die vektore in radiale. (4)

(c) Bepaal die hoek wat  $\vec{a} - \vec{b}$  met die  $y$ -as maak. (3)

5.2 (a) As  $\bar{u} = (a; -2; 3)$  en  $\bar{v} = (2; 4; -3)$ , bepaal  $\bar{u} \times \bar{v}$ . (5)

(b) Bereken vervolgens die waarde van  $a$  as  $\bar{u} \times \bar{v}$  loodreg is op  $\bar{r} = 15i + 5j$ . (4)

**Vraag 6****[20 punte]**

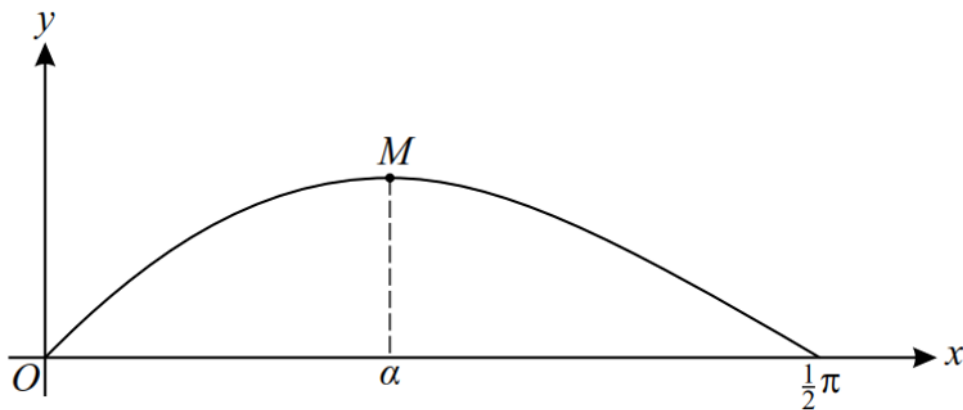
6.1 Differensieer die volgende. Dit is nie nodig om die antwoorde te vereenvoudig nie.

(a)  $f'(x)$  as  $f(x) = 5^{2x} \times \ln(x^2)$  (5)

(b)  $D_x [\text{bgtan}(e^x + e^{-x})]$  (4)

6.2 (a)  $x\sqrt[3]{y} - y\sqrt[3]{x} = 0$ . Gebruik **implisiete differensiasie** en bepaal  $\frac{dy}{dx}$ . (7)

(b) Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die grafiek by die punt (1; 1). (4)

**Vraag 7****[22 punte]**

7.1

Die diagram toon die grafiek van  $y = \frac{\sin 2x}{x+2}$  vir  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

(a) Bepaal  $\frac{dy}{dx}$ . (4)

(b) Toon aan dat  $\frac{dy}{dx} = 0$  kan vereenvoudig na  $\tan 2x = 2x + 4$ . (3)

(c) Die  $x$ -koördinaat van die maksimum M in hierdie gebied is  $\alpha$ .  
Toon aan dat  $\alpha$ , wat hierdie vergelyking se oplossing is, tussen 0,6 en 0,7 lê. (2)

(d) Gebruik Newton se metode en die vergelyking in vraag 7.1(b) om die waarde van  $\alpha$ , korrek tot vier desimale syfers, te bepaal. Toon duidelik hoe jy Newton se metode gebruik. (4)

7.2 (a)  $f(x) = \ln(7 - x^3)$ . Bepaal  $f''(x)$  en gebruik dit om aan te toon dat die  $x$ -waarde van 'n infleksie punt van  $f$  kan  $x = 0$  wees. (6)

(b) Toon nou aan dat dit wel 'n punt van infleksie is. (3)

**Vraag 8****[14 punte]**

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+x-1)}{(x+2)(x-2)}$$

8.1 Gee 'n rede waarom  $f$  nie kontinu in die punt  $x = 2$  is nie. (2)

8.2 Bepaal alle moontlike asimptote van  $f$ . (4)

8.3 Doen hierdie vraag op die antwoordblad op die grafiekpapier voorsien.

Die  $x$ -afsnitte van  $f(x)$  is by  $x = 0,6$  en  $x = -1,6$ . Die  $y$ -afsnit is by  $y = -0,5$ . Die funksie het 'n maksimum draaipunt by  $(-3; -5)$  en 'n minimum draaipunt by  $(-1; -1)$ .

Gebruik hierdie inligting asook die inligting verky uit vrae 8.1 en 8.2 en maak 'n sketsgrafiek van  $y = f(x)$ .

Toon duidelik die afsnitte met die asse, die asimptote en die draaipunte op jou skets aan. (8)

**Vraag 9****[35 punte]**

9.1 Bepaal die volgende integrale:

(a)  $\int \left( \frac{2}{x \ln 5} \right) + \cot^2 x \, dx$  (5)

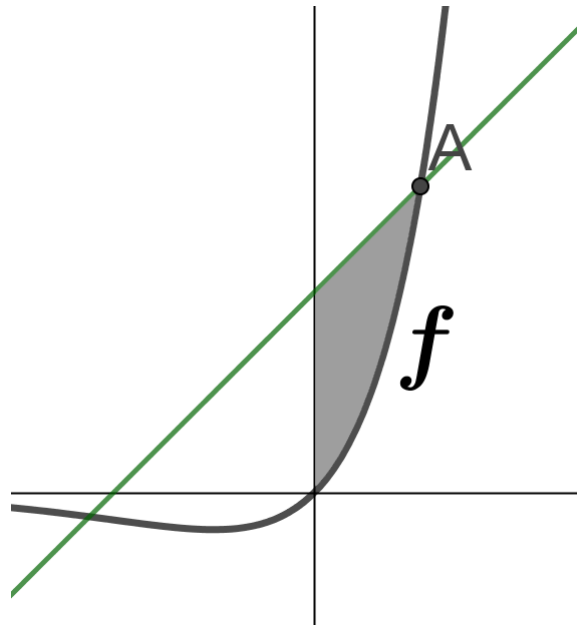
(b)  $\int \left( \frac{\ln(5x)}{x} \right)^5 dx$  (5)

(c)  $\int \cos^2(2x) \, dx$  (4)

9.2 (a) Ontbind  $\frac{2x^2 - 5x + 8}{x(x^2 + 4)}$  in parsieë breuke. (6)

(b) Bepaal vervolgens  $\int \frac{2x^2 - 5x + 8}{x(x^2 + 4)} dx$  (5)

9.3 Bepaal die waarde van  $\int_1^4 (2x^2 - 1) \, dx$  deur gebruik te maak van 'n **Riemann-som**. (10)

**Vraag 10****[13 punte]****Geen sakrekenaars mag in hierdie vraag gebruik word nie. Toon alle stappe van integrasie.**10.1 Gebruik faktorintegrasie en bepaal  $\int x \cdot e^x dx$ . (6)10.2 Die skets toon die grafiek van die funksie  $f(x) = x \cdot e^x$ , die lyn  $g(x) = x + 2$  asook die oppervlakte ingesluit tussen die grafieke en die  $y$ -as. Die grafieke sny by **A(1; 3)** (afgerond na heelgetalle).

Gebruik jou antwoord verkry in vraag 10.1 en bereken hierdie oppervlakte. (7)

**- EINDE VAN DIE VRAESTEL -**

# 2019

## Alpha Wiskunde



**Naam:** \_\_\_\_\_

**ID:**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Skool:** \_\_\_\_\_

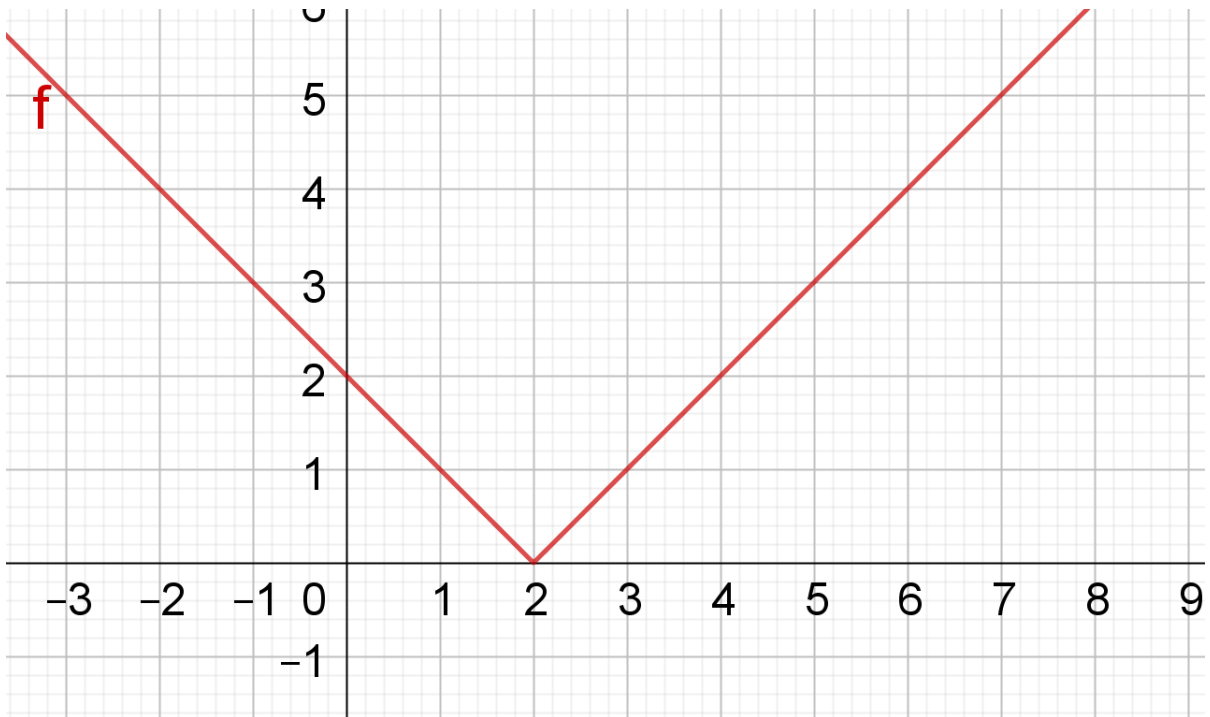
### Antwoordblad: VRAAG 1

### Punte

1.1	A	B	C	D
1.2	A	B	C	D
1.3	A	B	C	D
1.4	A	B	C	D
1.5	A	B	C	D
1.6	A	B	C	D
1.7	A	B	C	D
1.8	A	B	C	D
1.9	A	B	C	D
1.10	A	B	C	D

VRAAG	Moontlik Punt	Punt
1	20	
2	20	
3	16	
4	21	
5	19	
6	20	
7	22	
8	14	
9	35	
10	13	
<b>Totaal</b>	<b>200</b>	

Vraag 4.1



Vraag 8.4

