

# $\alpha$ -WISKUNDE

## Alpha Wiskunde Halfjaar eksamen 2019

**Graad 12**

**Tyd: 3 ure**

**Totaal: 200 punte**

### **INSTRUKSIES EN INLIGTING**

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Hierdie vraestel bestaan uit 8 bladsye, 'n formuleblad van 3 bladsye en 'n antwoordblad van 1 bladsy.
2. Beantwoord AL 10 vrae.
3. Nommer die antwoorde soos die vrae genommer is.
4. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n vraag.
5. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
6. Dui alle noodsaaklike berekeninge, diagramme, grafieke ensovoorts wat jy gebruik het om jou antwoorde te bepaal, duidelik aan.
7. Volpunte sal nie noodwendig aan slegs antwoorde toegeken word nie.
8. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
9. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word indien nodig.
10. 'n Formuleblad is aan die einde van die vraestel ingesluit.
11. Skryf netjies en leesbaar.

**Vraag 1****[20 punte]**

Hierdie vraag moet **op die antwoordblad** beantwoord word.

Elke vraag het **SLEGS** een korrekte antwoord en tel twee (2) punte. Merk die korrekte antwoord met 'n **X** op die Antwoordblad.

1.1 Die vergelyking van die raaklyn aan  $f(x) = e^{2x}$  by  $x = 0$  is ...

- (A)  $y = 2x + 1$  (B)  $y = 2x - 1$   
 (C)  $y = -2x + 1$  (D)  $y = -2x - 1$

1.2 Vir watter waardes van  $x$  sal die funksie  $f(x) = x^2 + 2x - 15$  stygend wees?

- (A)  $x \leq -5$  of  $x \geq 3$  (B)  $x \leq -1$   
 (C)  $x \geq -1$  (D)  $-5 \leq x \leq 3$

1.3 Gegee dat  $f(x) = \log_2(e^x)$ , dan is  $f'(x) =$

- (A)  $\frac{1}{\ln 2}$  (B)  $\frac{1}{e^x \ln 2}$   
 (C)  $\frac{1}{e^x}$  (D)  $\frac{e^x}{\ln 2}$

1.4 Gegee  $f(x) = 4e^{2x}$ . Dan is die inverse van  $f$  in die vorm  $f^{-1}(x) = \dots$

- (A)  $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right)$  (B)  $\ln\left(\frac{x}{4}\right)$   
 (C)  $\ln\left(\frac{x}{2}\right)$  (D)  $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

1.5 Vir watter waardes van  $a$  en  $b$  is die punt  $(1; 6)$  'n buigpunt van die funksie  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ ?

- (A)  $a = 1; b = 1$  (B)  $a = -3; b = 7$   
 (C)  $a = -3; b = 5$  (D)  $a = 1; b = -3$

1.6 Vir watter waarde van  $a$  sal die volgende matriksvergelyking geen oplossing hê nie?

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- (A)  $a = -\frac{3}{2}$  (B)  $a = 3$   
 (C)  $a = -\frac{2}{3}$  (D)  $a = \frac{3}{2}$

- 1.7 Vind die horisontale asimptoot, indien daar wel een is, van  $\frac{x^2+5x}{2x^3-x^2+4}$ .
- (A)  $y = 1$  (B)  $y = \frac{1}{2}$   
 (C)  $y = 0$  (D) Geen horisontale asimptoot nie.
- 1.8  $(1 - i)^4 =$
- (A)  $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$  (B)  $4e^{-\pi i}$   
 (C)  $4e^{\pi i}$  (D)  $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$
- 1.9 Gegee  $y = f(x)$  is differensieerbaar vir alle  $x \in \mathbb{R}$ . Verder is gegee dat  $f'(5) = 0$  en  $f''(5) < 0$ . Dan sal  $y = f(5)$  'n ...
- (A) lokale minimum wees. (B) lokale maksimum wees.  
 (C) stasionêre punt wees. (D) buigpunt wees.
- 1.10 As  $\ln f(x) = e^x \ln x$ , dan is  $f'(1) = \dots$
- (A)  $-\frac{1}{e}$  (B)  $-e$   
 (C)  $\frac{1}{e}$  (D)  $e$

**Vraag 2****[20 punte]**

- 2.1 Los op vir  $x$  en laat antwoorde in terme van  $e$  en  $\ln$ , indien nodig:
- (a)  $e^{2-x} = 6$  (3)  
 (b)  $\frac{e^x}{e^x-1} = 9$  (3)  
 (c)  $(\ln x)^2 = \ln e^2 x$  (6)
- 2.2 Beskou die funksie  $f(x) = \ln(x - e) - 1$ .
- (a) Skryf die vergelyking van die vertikale asimptoot neer. (2)  
 (b) Maak 'n sketsgrafiek van  $y = f(x)$  en toon alle afsnitte en asimptote duidelik aan op jou skets. (6)

**Vraag 3****[24 punte]**

- 3.1 Anne-Marie doen navorsing oor die gewig van vroulike olifante wat lewe in gevangenskap. Met die versameling van data stel hulle die formule

$$G = 4000 - \frac{8000}{1.05 + 1.1^t}$$

op, met  $G$  die gewig in kg van 'n vroulike olifant in gevangenskap van  $t$  jaar oud.

- (a) Bepaal die maksimum gewig van 'n vroulike olifant in gevangenskap. (2)
- (b) Toon aan, deur gebruik te maak van wiskundige berekening, dat die gewig van 'n vroulike olifant in gevangenskap voortdurend toeneem. (6)
- (c) Bereken, deur gebruik te maak van jou berekening in vraag 3.1(b), met watter snelheid die gewig van 'n tienjarige vroue olifant in gevangenskap toeneem. (2)

Patrick wil die formule van Anne-Marie graag so skryf dat hy die leeftyd van 'n vroulike olifant in gevangenskap vinnig kan bereken as hy die gewig van die olifant invul. Hy maak hiervoor in die gegewe formule die onderwerp  $t$ .

- (d) Skryf die formule van  $G$  in die vorm  $t = \log_a \left( \frac{a+bG}{c-G} \right)$  en bereken die ouderdom van 'n olifant van 3000 kg. (6)

- 3.2 Die volgende stelsel vergelykings word gegee:

$$(b - 1)x - 3y = 3 \text{ en } (b + 3)x - 9y = 11$$

- (a) Gebruik Cramer se reël en bepaal die waarde van  $x$  in terme van  $b$ . Toon die matrikse wat jy gebruik duidelik aan. (6)
- (b) Bepaal vervolgens die waarde van  $b$  indien dit gegee word dat  $x = 1$ . (2)

**Vraag 4****[16 punte]**

- 4.1 Doen die volgende berekening (in enige vorm) en gee die antwoord in eksponensiële vorm. Gebruik wortelvorm en  $\pi$  indien nodig.

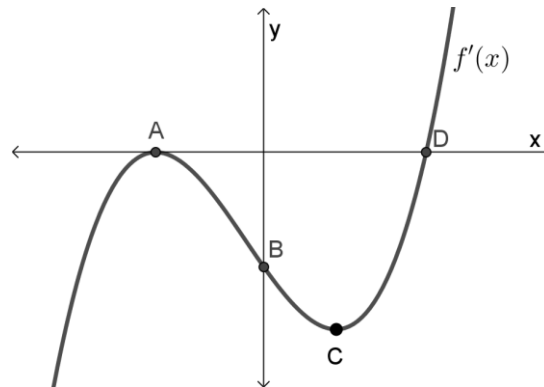
(a)  $10 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \times 5 \left( \cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} \right)$  (3)

(b)  $4 \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \div \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  (4)

- 4.2 Gebruik De Moivre se stelling en toon aan dat die waarde van  $\left( \frac{2i}{-1-\sqrt{3}i} \right)^{12}$  reëel is. Werk in poolvorm en gebruik wortelvorm en  $\pi$  indien nodig. (9)

**Vraag 5****[24 punte]**Gegee:  $(2x + y)^2 = 16x$ 

- 5.1 Toon aan dat  $\frac{dy}{dx} = \frac{16-8x-4y}{4x+2y}$ . (7)
- 5.2 'n **Horisontale raaklyn** aan die grafiek het 'n raakpunt by  $(a; 2)$ , met  $a > 0$ . Bepaal die waarde van  $a$ . (3)
- 5.3 Bepaal die aard van die stasionêre punt by  $(1; 2)$ . (8)
- 5.4 Bepaal die vergelyking van die normaal lyn aan die funksie waar  $x = 4$  en  $y \geq 0$ . (6)

**Vraag 6****[22 punte]**Gegee die funksie  $f'(x) = (x - 3)(x + 2)^2$ , die **afgeleide** van  $f(x)$ .

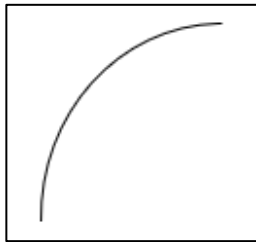
- 6.1 Bepaal die koördinate van punte A, B, C en D. (9)
- 6.2 Bepaal en klassifiseer die  $x$ -koördinate van die stasionêre punt(e) van  $f$ . Geen berekeninge hoef getoon te word nie. (5)
- 6.3 Skryf neer die nulpunte van  $f''$ . (2)
- 6.4 Bepaal die  $x$ -koördinaat waar  $f'$ , die **afgeleide** van  $f$ , van **konkawiteit** verander. (4)
- 6.5 Skryf neer vir watter waardes van  $x$  is  $f$  dalend? (2)

**Vraag 7****[14 punte]**'n Funksie is gegee as  $f(x) = \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)^2} - 5x$ .

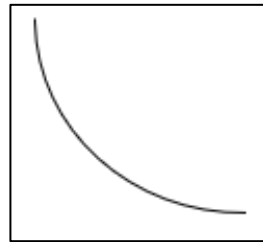
- 7.1 Bepaal die waarde van die  $y$ -afsnit. (2)
- 7.2 Bepaal die definisieversameling van  $f$ . (3)
- 7.3 Skryf neer die vergelyking(s), indien enige, van die:
- (a) horisontale asimptoot. (1)
  - (b) vertikale asimptoot. (2)
  - (c) skuins asimptoot. (2)

7.4 Bepaal die tekens van die eerste en tweede afgeleides van die volgende kurves:

(a)



(b)



(4)

**Vraag 8**

**[18 punte]**

Verbind die volgende rasionale funksie met die toepaslike grafieke, A – H, hieronder:

8.1  $y = \frac{x^2-9}{x+3}$

8.2  $y = \frac{x^2+12x+27}{x-3}$

8.3  $y = \frac{2x^2-3x-9}{(x+3)^2}$

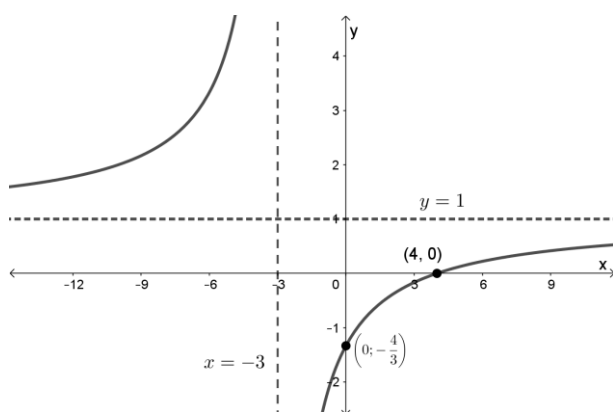
8.4  $y = \frac{2x^3-50x}{x^2-4}$

8.5  $y = \frac{-2x^2}{x^2-4}$

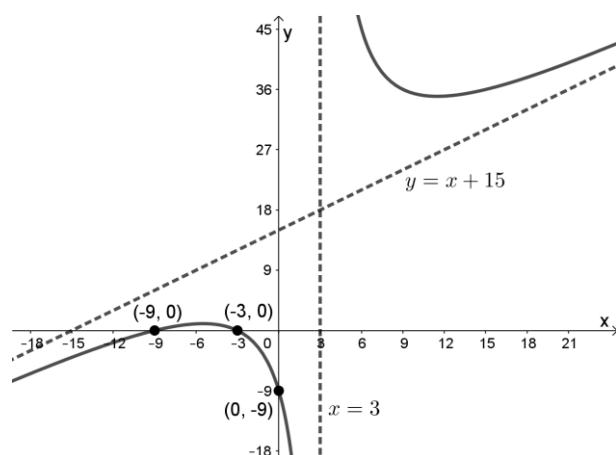
8.6  $y = \frac{x-4}{x+3}$

(6 × 3 = 18)

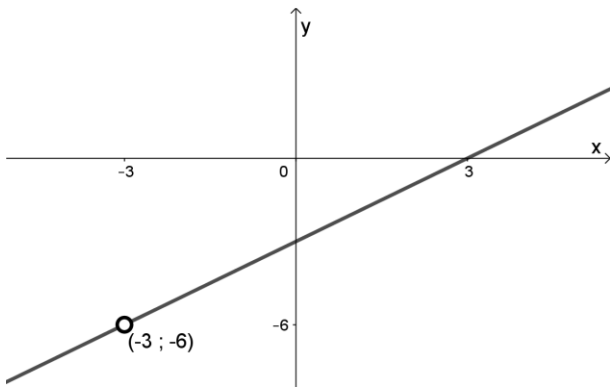
**Grafiek A:**



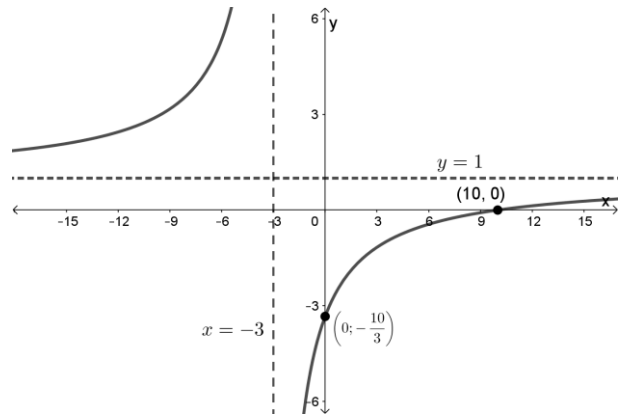
**Grafiek B:**



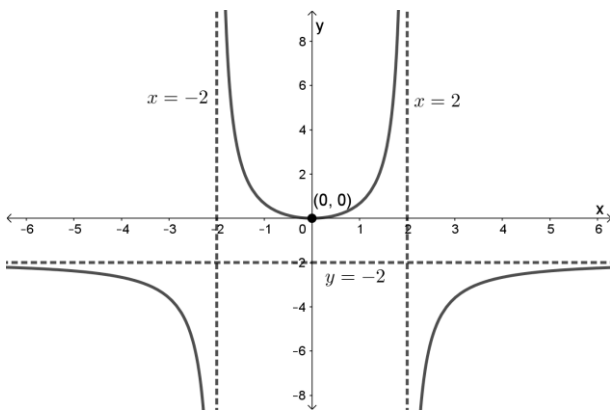
**Grafiek C:**



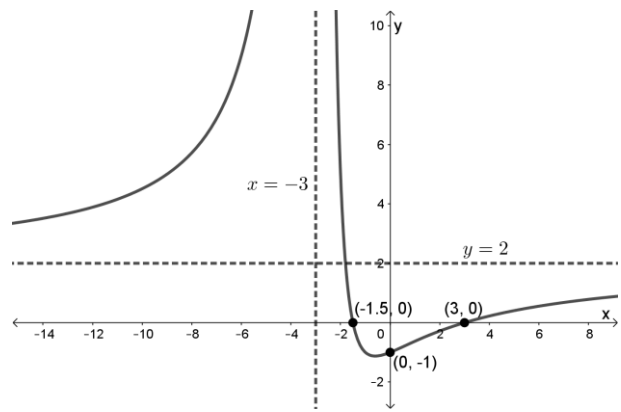
**Grafiek D:**



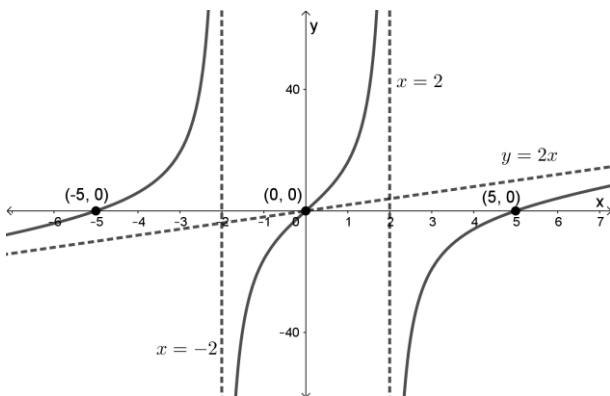
**Grafiek E:**



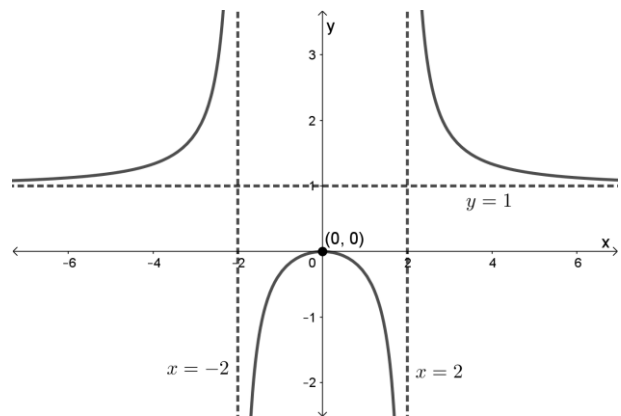
**Grafiek F:**



**Grafiek G:**



**Grafiek H:**



**Vraag 9****[24 punte]**9.1 Die funksie  $f(x)$  het die volgende eienskappe:

- $f'(x) = 2^{4x+3} \ln 2$
- Die  $y$ -afsnit van  $f$  is 3.

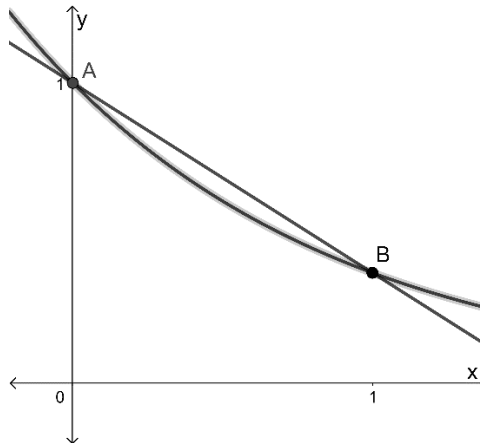
- (a) Bepaal die funksie  $f(x)$  wat aan hierdie vereistes voldoen. Laat jou antwoord in die vorm  $f(x) = 2^{ax+b} + c$ . (7)
- (b) Toon aan dat die funksie  $f(x)$  geen buigpunt het nie. (4)

9.2 Bepaal die volgende integrale:

- (a)  $\int 2^{5x-7} dx$  (3)
- (b)  $\int \left( \frac{5}{2x} + \frac{2x}{5} \right) dx$  (4)
- (c)  $\int \frac{2}{(x-3) \ln 5} dx$  (2)
- (d)  $\int \frac{e^{3x} - 2e^{-3x}}{e^x} dx$  (4)

**Vraag 10****[17 punte]**

10.1 Gegee die funksie  $f(x) = e^{-x}$ . A en B is punte op die grafiek waar  $x = 0$  en  $x = 1$ . AB is verbind om 'n reguitlyn te vorm.



- (a) Toon aan dat die vergelyking van die lyn deur A en B is  $y = (e^{-1} - 1)x + 1$ . (3)
- (b) Bereken vervolgens die oppervlakte ingesluit deur die twee grafieke, tussen A en B. Laat jou antwoord in die vorm  $ae^{-1} + b$ . (9)

10.2 Bepaal die volume van die omwentelingsliggaam wat ontstaan indien die funksie  $y^2(4x - 7) = 1$  om die  $x$ -as roteer tussen  $x = 2$  en  $x = 3$ . Laat jou antwoord in die vorm  $a \ln b$ . (6)

**- EINDE VAN DIE VRAESTEL -**

**Alpha Wiskunde Graad 12 - Halfjaar examen 2019****ANTWOORDBLAD**

Naam en Van: \_\_\_\_\_

Vraag Totaal	1 [20]	2 [20]	3 [24]	4 [16]	5 [24]	6 [22]	7 [14]	8 [18]	9 [24]	10 [18]	TOTAAL 200
Leerder punt											

**Vraag 1**

<b>1.1</b>	A	B	C	D
<b>1.2</b>	A	B	C	D
<b>1.3</b>	A	B	C	D
<b>1.4</b>	A	B	C	D
<b>1.5</b>	A	B	C	D
<b>1.6</b>	A	B	C	D
<b>1.7</b>	A	B	C	D
<b>1.8</b>	A	B	C	D
<b>1.9</b>	A	B	C	D
<b>1.10</b>	A	B	C	D