

**OUTEUR: RIKA GROBLER .....**

ISBN 1 919740-19-8

Kopiereg © 2020 ALPHAWISKUNDEBOEKE Rika Grobler

Alle regte voorbehou Geen gedeelte van hierdie publikasie mag in enige vorm

gereproduseer word nie, of elektronies, meganies, fotografies of per video sonder die nodige skriftelike toestemming van die outeur.

# Inhoud

<b>PUNTEVERDELING VIR EINDEKSAMEN .....</b>	<b>3</b>
<b>ALGEBRA .....</b>	<b>5</b>
Absolute waarde .....	5
Parsiële breuke .....	15
Oplos van polinoom vergelykings.....	19
Die binomiaal stelling .....	21
Magreekse .....	23
Wiskundige induksie .....	24
Die natuurlike logaritme en eksponent .....	27
Cramer se reël .....	29
Komplekse getalle.....	32
<b>TRIGONOMETRIE .....</b>	<b>36</b>
Inverse funksies .....	36
Toepassing van radiale in sektore.....	38
<b>VEKTORE .....</b>	<b>40</b>
<b>DIFFERENSIASIE .....</b>	<b>43</b>
Limiete .....	43
Kontinuïteit .....	43
Differensieerbaarheid.....	46
Gebruik differensiasie reëls.....	49
Eksponente en logaritmes.....	50
Implisiete differensiasie .....	51
Hoër orde afgeleides.....	52
Newton se metode .....	54
Optimering.....	55
Skets van rasionale funksies.....	56
<b>INTEGRASIE.....</b>	<b>59</b>
Tabel .....	59
Trigonometriese identiteite .....	60
Faktor integrasie .....	61
Integrasie met parsiële breuke .....	62
Integrasie met substitusie .....	63
Oppervlakte met integrasie .....	64
Volume van omwentelingsliggame.....	65
Die Riemann som.....	66

# **PUNTEVERDELING VIR EINDEKSAMEN**

**LET WEL:** Vraag 1 bestaan uit 15 multikeuse vrae en dit tel 30 punte. Dit sal logies nie vrae wees wat meer as 'n minuut of twee nodig het nie.

## **Algebra: $\pm 65$**

- Absolute Waarde
- Parsiële Breuke
- Oplos van Polinoom Vergelykings
- Die Binomiaalstelling
- Magreekse
- Wiskundige Induksie
- Die natuurlike logaritme en eksponent
- Cramer se reël
- Komplekse getalle, bewerkings in verskillende vorme saam met de Moivre se stelling
- Wortels van komplekse getalle

## **Trigonometrie: $\pm 15$**

- Inverse trigonometriese funksies, met grafieke en transformasies
- Toepassing van radiaalmaat in sektore

## **Vektore: $\pm 15$**

## **Calculus: $\pm 105$**

## Differensiasie:

- Limiete, kontinuïteit en differensieerbaarheid
- Gebruik differensiasie reëls
- Differensieer eksponente en logaritmes. Ook  $e^x$  en natuurlike logaritmes.
- Implisiete differensiasie
- Hoër orde afgeleides en die betekenis daarvan.
- Newton se metode
- Optimering
- Skets van rasionale funksies

## Integrasie:

- Gebruik tabel, ook vir lineêre funksies
- Trigonometriese integrasie m.b.v. identiteite
- Faktor (stuksgewyse) integrasie
- Integrasie m.b.v. partiële breuke
- Integrasie waar substitusie gebruik kan word
- Oppervlakte onder en tussen grafieke
- Volume van omwentelingsliggame
- Die Riemansom

**LET WEL:** Die logaritme wette word op die antwoordblad gegee. Dit kan van die leerlinge verwag word om dit te gebruik.

# ALGEBRA

## ABSOLUTE WAARDE

Absolute waarde word geskryf met twee regaf strepies:  $|x|$ .

Absolute waarde is ALTYD positief. Dit maak negatiewe getalle positief. Dit los positiewe getalle onveranderd.

Daar is 4 soorte probleme:

- 1 Vergelykings met getal buite absolute waarde.
- 2 Vergelykings met  $x$  buite absolute waarde.
- 3 Ongelykhede.
- 4 Grafieke

Hier volg nou voorbeelde van hierdie vier tipe probleme.

**Tipe 1.** Hierdie is vergelykings met absolute waarde en slegs 'n getal buite die absolute waarde. Dit word meesal benodig om die  $x$ -afsnitte van die grafieke te bereken.

**Voorbeelde 1**

1 Los op vir  $x$ :

1.1  $|x - 2| = -4$

Dit is onmoontlik, want absolute waarde kan nie gelyk wees aan 'n negatiewe getal nie. Dus geen antwoord nie.

1.2  $|x - 2| = 4$

Wanneer die absolute waarde teken gelos word, kan dit wat binne staan positief of negatief wees. Dus:

$x - 2 = 4$  OF  $-x + 2 = 4$ . Ons skryf gewoonlik nie hierdie stap neer nie, maar gaan dadelik na die volgende stap:

$x - 2 = 4$  of  $x - 2 = -4$ . Daarna die antwoorde:  
 $x = 6$  of  $x = -2$

**Tipe 2.** Hierdie is vergelykings met absolute waarde met 'n onbekende buite die absolute waarde. By hierdie probleme moet daar altyd twee somme gedoen word en elkeen moet 'n voorwaarde vooraan hê.

### Voorbeelde 2

2.1 Los op vir  $x$ :  $|x - 4| = 2 - 3x$

Hierdie probleem het 'n  $x$  buite die absolute waarde. Dit moet in twee stappe gedoen word en die voorwaarde vir elke stap moet neergeskryf word. Indien jy dit nie doen nie, gaan jy geen punte kry nie.

Wat is die voorwaarde?

Die gedeelte binne die absolute waarde kan positief ( $\geq 0$ ) of negatief ( $< 0$ ) wees,

Hoekom is die “is gelyk aan” by die groter as? Net omdat die wiskundiges so besluit het, dus net definisie.

Begin hierdie tipe somme altyd met die voorwaardes, skryf dit sommer so langs mekaar neer soos hier getoon (Jy kry klaar 2 punte deur net dit neer te skryf):

$$x - 4 \geq 0 \qquad \text{OF} \qquad x - 4 < 0$$

En kry  $x$  nou alleen:

$$x \geq 4 \qquad \text{OF} \qquad x < 4$$

Onthou nou: By die eerste voorwaarde bly alles dieselfde, by die tweede voorwaarde moet die teken verander, maar SLEGS dit wat binne absolute waarde staan. Daar ontstaan nou twee vergelykings wat jy moet oplos. Dan moet jy kyk of die antwoord binne die beperking val.

Hierdie tipe probleme kan geen, een of twee oplossings hê. Hier is volledige oplossing:

**Voorwaardes:**

$$x \geq 4$$

Dan

$$x - 4 = 2 - 3x$$

$$\therefore 4x = 6; \therefore x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Nou kyk jy: Is  $\frac{3}{2} \geq 4$ ?

**NEE**, so nie antwoord nie.

$$\text{OF } x < 4$$

Dan

$$-x + 4 = 2 - 3x$$

$$\therefore 2x = -2; \therefore x = -1$$

Nou kyk jy: Is  $-1 < 4$ ?

en die antwoord is

**JA**

Dus die probleem het net een oplossing:  $x = -1$ .

Die grafieke van  $y = |x - 4|$  en  $y = 2 - 3x$  sal mekaar dus net een keer sny.

2.2 Los op vir  $x$ :  $|x + 4| = x$

### Oplossing

**Voorwaardes:**

$$x + 4 \geq 0, \therefore x \geq -4 \quad \text{OF} \quad x + 4 < 0; \therefore x < -4$$

(Onthou: 2 punte!)

Dan

$$x + 4 = x, \text{ geen oplossing}$$

$$\text{OF} \quad -x - 4 = x;$$

$$\therefore -2x = 4; \therefore x = -2$$

$$\text{Is } -2 < -4?$$

**NEE**

dus nie oplossing nie.

Hierdie probleem het **GEEN** oplossing nie.

Die grafieke van  $y = |x + 4|$  en  $y = x$  sal dus nooit sny nie.

### Tipe 3.

Hierdie is ongelykhede met absolute waarde, maar slegs met getalle buite die absolute waarde.

3 Ongelykhede beteken **kleiner as (<)** of **groter as (>)**.

Die < is die maklikste, want die absolute waarde moet tussen die negatiewe en die positiewe getal lê.

### Voorbeelde 3

3.1 Los op vir  $x$ :  $|x - 4| < 7$

#### Oplossing

Kan dadelik skryf:  $-7 < x - 4 < 7$

Met antwoord:  $-3 < x < 11$

Die > bietjie meer werk, dit moet as **OF** geskryf word, want dit is kleiner as negatiewe OF groter as positiewe.

3.2 Los op vir  $x$ :  $|x - 4| > 7$

#### Oplossing

Dan is  $x - 4 < -7$  **OF**  $x - 4 > 7$

Met antwoord:  $x < -3$  OF  $x > 11$

Let op dat hierdie antwoord presies die teenoorgestelde van 3.1 is.

Wat gebeur as daar = by is? Dit word presies dieselfde gedoen:

3.3 Los op vir  $x$ :  $|x - 4| \leq 7$

Kan dadelik skryf:  $-7 \leq x - 4 \leq 7$

Met antwoord:  $-3 \leq x \leq 11$

### Drie uitsonderings:

3.4 Los op vir  $x$ :  $|x - 4| < -7$

Dit is onmoontlik, want absolute waarde is altyd positief. Dit kan dus nie kleiner as 'n negatiewe getal wees nie. Dus geen oplossing nie.

3.5 Los op vir  $x$ :  $|x - 4| > -7$

Dit is altyd waar, want absolute waarde is positief en dus altyd groter as 'n negatiewe getal.

Antwoord dus  $x \in \mathbb{R}$ .

3.5 Los op vir  $x$ :  $|x - 4| \leq 0$

Absolute waarde kan nie negatief of kleiner as nul wees nie, maar hier is  $=$  teken by. Absolute waarde kan wel gelyk aan 0 (nul) wees.

Dus die antwoord is:  $x = 4$ .

Indien hierdie probleme met grafieke gemeng word, moet jy onthou dat op enige grafiek is groter as ( $>$ ) bokant en kleiner as ( $<$ ) onderkant die  $x$ -as is. Sal dit by grafieke verder verduidelik.

## Tipe 4.

### Grafieke

Die vraag kan op 3 maniere gevra word:

- 1 Teken 'n grafiek van 'n lineêre absolute waarde.
- 2 Die grafiek word gegee en jy moet vrae daarvoor beantwoord.
- 3 'n Ander soort grafiek word gegee en jy moet hierdie grafiek se absolute waarde teken.

### Voorbeelde 4

4.1 By hierdie vrae moet die afsnitte met die asse, die knakpunt en die vorm bepaal word.

Skets  $y = |x - 1| - 2$

### Oplossing

$x$ -afsnitte, stel  $y = 0$ . Dit is nou soos vb. 1.1.

$$|x - 1| - 2 = 0; \therefore |x - 1| = 2$$

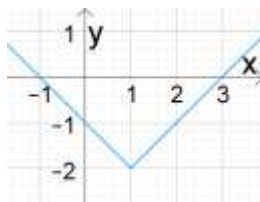
Dus  $x - 1 = \pm 2$ ;  $x = 3$  of  $x = -1$

$y$ -afsnit, stel  $x = 0$ :  $y = |0 - 1| - 2 = |-1| - 2 = -1$

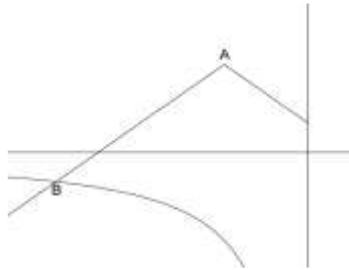
Knakpunt: (Onthou,  $x$  teenoorgestelde teken)  $(1; -2)$

Vorm: V, omdat absolute waarde positief is.

Skets:



4.2 Die volgende skets toon die grafieke van  $f(x) = -|x + 2| + 3$  en  $g(x) = \frac{6}{x}$  vir  $x \leq 0$



- Gee die koördinate van A, die knakpunt van  $f(x)$ .
- Bereken die koördinate van B, die snypunt van  $f(x)$  en  $g(x)$ .
- Gebruik jou antwoord van (b) saam met die grafiek en gee die  $x$ -waardes waar  $f(x) > g(x)$ .

**Oplossing:**

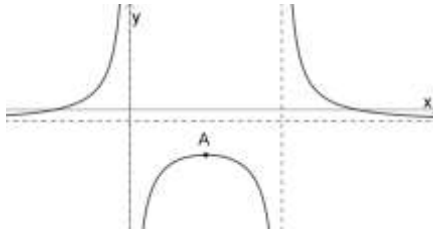
- $(-2; 3)$
- B lê op +(positiewe) gradiënt,  $\therefore y = x + 2 + 3$ ;  
 $y = x + 5$

Dus  $x + 5 = \frac{6}{x}$ ;  $x^2 + 5x - 6 = 0$ ;  $x = -6$ ;  $\therefore y = -1$

- $f(x) > g(x)$  beteken  $f$  bokant  $g$ , maar nie ingesluit nie, want nie = nie:

Dit is vir  $-6 < x < 0$

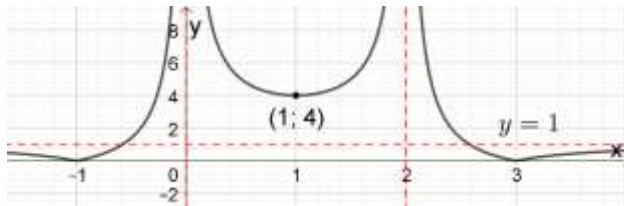
4.3 Die skets toon die grafiek van  $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$ .



Maak 'n netjiese sketsgafiek van  $g(x) = \left| \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2} \right|$ .

**Oplossing:**

Alles wat onder die  $x$ -as is moet reflekteer in die as, ook die asimptoot wat tans negatief is. In die oorspronklike vraag moes die draaipunt en afsnitte bereken word. Dit is nie nou van toepassing nie, word wel op skets getoon:



## PARSIËLE BREUKE

Hierdie vraag word gewoonlik saam met integrasie gevra. Daar is 3 tipes wat jy moet kan doen.

- 1 Slegs lineêre faktore in die noemer wat nie herhaal nie.
- 2 Slegs lineêre faktore in die noemer wat herhaal.
- 3 Kwadratiese faktore in noemer wat nie reël kan faktoriseer nie.

Daar is stappe wat dieselfde is:

- Maak seker dat die graad van die noemer groter is as die graad van die teller, doen anders eers langdeling.
- Maak seker dat die noemer volledig gefaktoriseer in  $\mathbb{R}$  is.
- Skryf die breuk as aparte breuke (sal in vb wys).
- Maal met die kgv.
- As daar lineêre faktore is, vervang hul nulpunte in  $x$ .
- Vergelyk die koëffisiënte van die LK en die RK. Begin altyd met die hoogste mag van  $x$ .
- Skryf die antwoord neer.

## Tipe 1

### Voorbeeld 5

Ontbind  $\frac{x+7}{(x-2)(x+1)}$  in partiële breuke.

### Oplossing

Hierdie breuk het ontstaan deur twee breuke, waarvan die noemers  $x - 2$  en  $x + 1$  was, bymekaar te tel.

$$\text{Stel dus: } \frac{x+7}{(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

Vermenigvuldig met die **KGV**,  $(x - 2)(x + 1)$ :

$$x + 7 \equiv A(x + 1) + B(x - 2)$$

Nulpunt van  $(x - 2)$ , Stel  $x = 2$ :

$$\therefore 2 + 7 = A(2 + 1) + B(2 - 2); 9 = 3A, \therefore \mathbf{A = 3}$$

Nulpunt van  $(x + 1)$ , Stel  $x = -1$ :

$$\therefore -1 + 7 = A(-1 + 1) + B(-1 - 2), 6 = -3B, \therefore \mathbf{B = -2}$$

Vervang die  $A = 3$  en  $B = -2$  terug in:

$$\therefore \frac{x + 7}{(x + 1)(x - 2)} \equiv \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x + 1}$$

## Tipe 2

### Voorbeeld 6

Ontbind  $\frac{2x^2+x-15}{(x^2-2x+1)(x+2)}$  in parsieële breuke.

### Oplossing

Let op dat die noemer nie volledig gefaktoriseer is nie:

$$\frac{2x^2 + x - 15}{(x - 1)^2(x + 2)}$$

Die noemer is:  $(x - 1)$ ,  $(x - 1)^2$  en  $(x + 2)$

Lineêre faktore wat herhaal

Stel dus:

$$\therefore \frac{2x^2 + x - 15}{(x - 1)^2(x + 2)} \equiv \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 2}$$

Vermenigvuldig elke breuk met KGV:  $(x - 1)^2(x + 2)$

$$2x^2 + x - 15 \equiv A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x - 1)^2$$

$$\text{Stel } x = 1: \quad \therefore -12 = A(0)(3) + B(3) + C(0), \\ -12 = 3B, B = -4$$

$$\text{Stel } x = -2: \quad \therefore -9 = A(-3)(0) + B(0) + C(-3)^2 \\ -9 = 9C, C = -1$$

Ons kort nou nog vir A, maar daar is nie meer nulpunte nie. Kyk na identiteit bo, die hoogste mag van  $x$  is 2. En die LK = RK.

Links is daar 2 en regs is daar  $A + C$ . Dus

$$2 = A + C, \quad \therefore 2 = A - 1, \quad \therefore A = 3$$

$$\therefore \frac{2x^2 + x - 15}{(x - 1)^2(x + 2)} \equiv \frac{3}{x - 1} - \frac{4}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x + 2}$$

### Tipe 3

#### Voorbeeld 7

Ontbind  $\frac{5x^2 - 4x + 3}{(x-1)(x^2+1)}$  in parsieële breuke.

#### Oplossing

Let op dat  $x^2 + 1$  nie verder kan faktoriseer nie.

Stel nou:

$$\frac{5x^2 - 4x + 3}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Vermenigvuldig met die **KGV**:  $(x-1)(x^2+1)$

$$\therefore 5x^2 - 4x + 3 \equiv A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

Probeer altyd eers die nulpunte van die noemer:

$$\text{Stel } x = 1: \quad \therefore 4 = 2A, \quad A = 2$$

Die hoogste mag is 2. Stel LK = RK:

$$5 = A + B, \quad \therefore 5 = 2 + B, \quad \text{Dus } B = 3.$$

Neem nou konstantes en stel LK = RK:

$$3 = A - C, \quad \therefore 3 = 2 - C, \quad \text{Dus } C = -1$$

$$\therefore \frac{5x^2 - 4x + 3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3x-1}{x^2+1}$$

## OPLOS VAN POLINOOM VERGELYKINGS

Dit is belangrik om die vraag reg te lees. Moet jy:

- Faktoriseer
- Die vergelyking oplos, waar jy ook sal moet faktoriseer.

Verder moet jy baie mooi lees hoe die antwoorde moet wees:  $\mathbb{Q}$  wat raionaal is,  $\mathbb{R}$  wat reëel is,  $\mathbb{C}$  wat kompleks is.

Onthou ook die volgende:

- Rasionale nulpunte sal altyd  $\frac{a_0}{a_n}$  wees, waar  $a_0$  die konstante en  $a_n$  die hoofkoeffisiënt is.
- Irrasionale en komplekse nulpunte kom ALTYD in pare voor. Wees versigtig, dit is die irrasionale of die imaginêre deel wat die  $\pm$  kry. Vraestelle skryf die soms met die deel eerste, soos bv.  $2i - 4$ . Die ander nupunt  $-2i - 4$ .

### Voorbeeld 8

1 Faktoriseer  $x^4 + 5x^3 + 27x^2 + 5x - 174$  as  $x = -2 - 5i$  'n nulpunt is. Gee antwoord in  $\mathbb{Q}$ .

**Oplossing** (ons gaan eers 'n kwadratiese faktor kry. Daar is verskillende maniere, hierdie is die maklikste)

$$x = -2 \pm 5i, \text{ dus } x + 2 = \pm 5i$$
$$(x + 2)^2 = (\pm 5i)^2 \dots \text{kwadreer}$$
$$x^2 + 4x + 4 = 25i^2 \dots i^2 = -1$$

Dus  $x^2 + 4x + 29$  is 'n faktor van die polinoom.

Nou moet die ander kwadratiese faktor bepaal word.

Jy kan langdeling gebruik, of inspeksie.

$$(x^2 + 4x + 29)(x^2 + x - 6)$$
$$= (x^2 + 4x + 29)(x - 2)(x + 3)$$

Dit is faktore met rasionale koeffisiënte soos gevra.

### Voorbeeld 9

Los op vir  $x$ :  $x^4 + 5x^3 + 27x^2 + 5x - 174 = 0$  as  
 $x = -2 - 5i$  'n wortel is. Gee antwoord in  $\mathbb{C}$ .

### Oplossing

Presies dieselfde stappe as in die vorige probleem moet geneem word, behalwe dat daar nou 'n vergelyking is. Daar moet nog 'n paar stappe geneem word. Die antwoord moet nou kompleks wees, wat beteken dat die faktorisering kompleks moet wees:

$$(x^2 + 4x + 29)(x - 2)(x + 3) = 0$$
$$(x + 2 + 5i)(x + 2 - 5i)(x - 2)(x + 3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \pm 5i \text{ of } x = 2 \text{ of } x = -3$$

By hierdie probleem is die laaste stap met faktorisering nie nodig nie, die kwadratiese polinoom is bepaal met die wortels. Kon dus dadelik na eerste faktorisering na antwoorde gaan.

## DIE BINOMIAAL STELLING

Die formule wat hier gebruik word staan op die formuleblad:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Hierdie formule kan net gebruik word indien  $n$  'n positiewe heelgetal is. Daar is ook basies drie tipe vrae wat gevra kan word.

### Tipe 1.

Die vraag is om 'n binomiaal uit te brei. Dit sal slede gevra word en nie vir magte hoër as 4 nie:

### Voorbeeld 10

Gebruik die binomiaalstelling en brei die volgende uit:

$$(x + 2y)^4$$

### Oplossing

$$\begin{aligned}(x + 2y)^4 &= \binom{4}{0} x^4 (2y)^0 + \binom{4}{1} x^3 (2y)^1 + \binom{4}{2} x^2 (2y)^2 \\ &\quad + \binom{4}{3} x^1 (2y)^3 + \binom{4}{4} x^0 (2y)^4 \\ &= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4\end{aligned}$$

## Tipe 2

By hierdie vrae word 'n spesifieke term gevra:

**ONTHOU** die  $r$ 'de term is in die  $(r - 1)$ 'de posisie.

### Voorbeeld 11

Bepaal die 6'de term van  $\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)^{10}$ .

#### Oplossing

Skrif altyd die waardes van  $a, b, n$  en  $r$  neer:

$$a = 2x, b = -\frac{3}{x^2}, n = 10, r = 5 (6 - 1)$$

$$\text{Dus } \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{10}{5} (2x)^{10-5} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^5$$

Bereken eers die getalle met jou sakrekenaar en doen dan die  $x$ 'e.

$$= -\frac{1959552}{x^5}$$

## Tipe 3

Die vraag hier is om die koëffisiënt van 'n term te gee:

### Voorbeeld 12

Bepaal die koëffisiënt van  $x^2$  in die uitbreiding van

$$\left(3x - \frac{4}{x}\right)^8$$

#### Oplossing

Die groot probleem hier is om die waarde van  $r$  te bepaal. Skryf dit eers so neer:

$$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{8}{r} (3x)^{8-r} \left(-\frac{4}{x}\right)^r$$

Kyk nou na die  $x$ 'e:  $x^{8-r} \div x^r = x^2$

Dus  $8 - r - r = 2$ , dit gee  $r = 3$ .

$$\begin{aligned} \text{Dus } \binom{8}{3} 3^{8-3} (-4)^3 x^2 \\ = -870912x^2 \end{aligned}$$

Dus die koëffisiënt van  $x^2$  is **-870912**.

## MAGREEKSE

Die vrae gaan ook oor binome, maar hier is die waarde van  $n$  nie 'n positiewe heel getal nie. Op die formuleblad word die eerste drie terme gegee. Die 4e term kan ook gevra word. Voorbeelde sluit in:

$$\frac{2}{(1+x)^4} = 2(1+x)^{-4}, \sqrt{1-2x} = (1-2x)^{\frac{1}{2}}$$

Die formule word op die formuleblad gegee:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots ; \text{mits / if } |x| < 1$$

Let op dat die LK is  $1+\dots$ . Indien daar 'n ander getal is, moet dit eers gemeenskaplik uitgehaal word. Verder het die formule slegs 'n  $x$ , maar vrae het dikwels iets anders, soos die  $-2x$  in die voorbeeld bo. Dit beteken net dat al die plekke waar daar  $x$  aan RK is, moet dit vervang word met  $(-2x)$ .

### Voorbeeld 13

Gee die eerste vier terme van die uitbreiding van  $\frac{1}{2+x}$ . Gee ook die waardes van  $x$  waarvoor die uitbreiding geldig is.

#### Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}, \text{ Sorg dat daar 'n 1 staan.} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + (-1) \left(\frac{x}{2}\right) + \frac{(-1)(-2)}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots\right) \end{aligned}$$

Let op dat die  $x$  in RK van formule vervang is met  $\frac{x}{2}$ .

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \dots$$

Hierdie resultaat is geldig/ konvergeer as  $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ ,

$$\therefore |x| < 2$$

## WISKUNDIGE INDUKSIE

Hierdie is 'n metode om te bewys dat twee uitdrukkings gelyk aan mekaar is vir alle waardes van die onbekende. Daar is 4 stappe wat gedoen moet word, as daar staan “**bewys**” moet LK en RK apart wees:

1. **Bewys** dit is waar vir  $n = 1$ .
2. **Aanvaar** dat die bewering waar is vir  $n = k$ .
3. Gebruik nr 2 en **bewys** dat die bewering waar is vir  $n = k + 1$ .
4. Skryf gevolgtrekking neer.

By stappe 1 en 3 staan daar bewys, Lk en Rk dus apart. Die woord “**Aanvaar**” moet in jou bewys staan.

### Voorbeeld 14

Bewys dat  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$  vir alle natuurlike getalle  $n$ .

- Aan die linker kant is  $n$  die aantal terme.
- Aan die regterkant moet  $n$  vervang word.

### Oplossing

**STAP 1:** Toets as  $n = 1$ :

$$\text{LK} = 2 \text{ (die eerste term)}$$

$$\text{RK} = 1(1 + 1) = 2$$

$\therefore$  LK = RK en die bewering is waar vir 'n natuurlike getal,  $n = 1$

**STAP 2:** **Aanvaar** die bewering is waar vir 'n natuurlike getal  $k$ , d.w.s. vir  $n = k$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k + 1) \quad (*)$$

Hierdie stap gaan nou in die volgende gebruik word. Die eerste  $k$  elemente wat bymekaar getel word, kan vervang word met die RK van hierdie uitdrukking.

**STAP 3:** Beskou nou  $n = k + 1$ :

$$RK = (k + 1)(k + 1 + 1)$$

Vervang  $n = k + 1$  in die oorspronklike vergelyking.

$$= (k + 1)(k + 2)$$

$$LK = 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1)$$

Vanuit STAP 2, tel die  $(k + 1)$ 'de term by

$$= k(k + 1) + 2(k + 1) \dots \text{Uit (*)}$$

$$= (k + 1)(k + 2)$$

$$= RK$$

**STAP 4:** Die bewering is dus waar volgens wiskundige induksie.

## Sigma Notasie

Omdat die linkerkant van hierdie tipe somme dikwels "optel" is, kan sigma notasie gebruik word.

### Voorbeeld 15

Bewys dat 
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$$

Dit beteken dat

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1).$$

## Oplossing

**STAP 1:** Toets as  $n = 1$ :

$$LK = 1, RK = \frac{1}{6}(1 + 1)(2(1) + 1) = 1$$

$\therefore$  LK = RK en die bewering is waar as  $n = 1$

**STAP 2:** **Aanvaar** die bewering is waar vir 'n natuurlike getal  $k$ , d.w.s. vir  $n = k$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k}{6}(k + 1)(2k + 1)$$

Ons gaan weer hierdie stap in volgende gebruik:

**STAP 3:**Beskou nou  $n = k + 1$ :

$$\text{LK} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2$$

$$= \frac{k}{6}(k + 1)(2k + 1) + (k + 1)^2$$

$$= \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k + 1)[k(2k + 1) + 6(k + 1)]}{6}$$

$$= \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$\text{RK} = \frac{k + 1}{6}(k + 1 + 1)(2(k + 1) + 1)$$

$$= \frac{(k + 1)(k + 2)(2k + 3)}{6}$$

$$= \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \text{LK}$$

**STAP 4:**

Die bewering is dus waar volgens wiskundige induksie.

By hierdie probleme is die likerkant nie noodwendig optel nie. Die linker kant kan ook die vermenigvuldiging van terme wees. In die 2019 gr 12 eksamen is die bewys van de Moivre se stelling gevra. Enige formule wat waar is vir  $n \in \mathbb{N}$  kan met wiskundige induksie bewys word.

## DIE NATUURLIKE LOGARITME EN EKSPONENT

Die getal  $e$  is ontdek met navorsing oor saamgestelde rente. Daarna het verskeie formules ontstaan om die waarde van  $e$ , wat irrasionaal is, te bereken. Hieruit is die volgende gevogtrekking gemaak:

Die funksie  $f(x) = e^x$  se afgeleide is altyd gelyk aan die funksie self. Dus ook die funksie se integraal:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \text{ en } \int e^x dx = e^x + k.$$

Enige eksponent het 'n inverse logaritme. Daarom ook  $e^x$ . Hierdie logaritme is so belangrik, dat dit 'n spesiale naam gekry het:

As  $f(x) = e^x$  dan is  $f^{-1}(x) = \ln(x)$

Dit word dikwels geskryf as  $\ln|x|$  aangesien logaritmes net vir positiewe getalle gedefinieer is.

Verder weet ons nou dat hierdie spesiale logaritme die oppervlakte tussen 'n hiperbool en die  $x$ -as gee:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k \text{ of } \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Met behulp van hierdie formules, kon daar formules vir die differensiasie van gewone eksponente en logaritmes bepaal word:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a \text{ en } \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Belangrik om te weet hoe om in 'n vergelyking vanaf 'n eksponent na 'n logaritme om te skakel, of andersom:

As  $10 = e^x$ , dan is  $x = \ln 10$ .

As  $10 = \ln x$ , dan is  $x = e^{10}$ .

Verder is  $\ln(e^x) = x$  en  $e^{\ln x} = x$ .

### Voorbeeld 16

- 1 Bepaal  $f'(x)$  as  $f(x) = e^{\cos x}$
- 2 Bepaal die inverse funksie van  $f(x) = e^{3x} + 2$

### Oplossings

- 1 Gebruik kettingreël:  $f'(x) = e^{\cos x} \times (-\sin x)$
- 2 Ruil  $x$  en  $y$  om:  
 $x = e^{3y} + 2, \therefore e^{3y} = x - 2, \therefore 3y = \ln|x - 2|$   
Dus  $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \ln|x - 2|$

Alle eienskappe van logaritmes geld ook vir  $\ln$ .  
Wanneer daar gedifferensieer moet word, is dit baie eenvoudiger indien die funksie eers met die wette uitgebrei word.

### Voorbeeld 17

Bepaal  $f'(x)$  as  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$

### Oplossing

Gebruik nou eers die logaritme wette:

$$f(x) = \ln x^2 - \ln(x + 1) = 2 \ln x - \ln(x + 1).$$

$$\text{Dus } f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}$$

## CRAMER SE REËL

Daar is 'n paar metodes om stelsels lineêre vergelykings op te los. Cramer se reël gee 'n metode om 'n stelsel gelyktydige lineêre vergelyking met behulp van determinante van matrikse op te los. Ons sal in die kursus net tot by drie vergelykings met drie onbekendes gaan. As jy IT as vak het, kan jy gerus probeer om prosedure te skryf vir meer vergelykings.

Wat handig van Cramer se reël is, is dat mens net vir een van die onbekendes kan oplos. Dit gee ook 'n vinnige metode om te toets of 'n stelsel geen oplossings het nie – sal dit bietjie later toon.

Cramer werk met determinatne, dit beteken dat jy moet weet hoe om 'n determinant te bereken.

### Cramer se reël

Bestudeer 'n stelsel lineêre vergelykings met  $n$  onbekendes en  $n$  vergelykings, wat in matriksvorm as volg voorgestel word:

$$Ax = b$$

Waar  $A$  die **vierkantige matriks** is waarvan die **determinant**  $\neq 0$  en  $b$  die “**antwoord**” is. Dan kan enige van die onbekendes met die volgende formule bereken word:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Waar  $A_i$  die matriks is wat verkry word deur die  **$i$ 'de kolom** met  $b$  te vervang. En “**det**” is die **determinant** van die matriks.

### Voorbeeld 18

Gebruik Cramer se reël en los die volgende stelsel vergelykings op:

$$2x + y = 9 \quad \text{en} \quad 3x - y = 11$$

### Oplossing

Skryf die stelsel vergelykings eers in matriks vorm, dan lyk dit soos volg:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Nou is dit in hierdie vorm:  $Ax = b$ , waar  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

en  $b = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$

Volgens Cramer se reël is:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} \quad \text{en} \quad y = \frac{\det A_y}{\det A}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (1)(3) = -5$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 11 & -1 \end{vmatrix} = (9)(-1) - (1)(11) = -20$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = (2)(11) - (9)(3) = -5$$

Vervang terug in, om  $x$  en  $y$  te bereken:

$$\therefore x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{-20}{-5} = 4 \quad \text{en} \quad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{-5}{-5} = 1$$

### Voorbeeld 19

Indien  $\det \mathbf{A} = 0$  word daar met 0 gedeel, wat ongedefinieerd is. Indien dit gebeur by Cramer se reël, beteken dit dat daar of geen oplossing, of oneindig baie oplossings is.

Gebruik Cramer se reël en bereken die waarde van  $a > 0$  indien die volgende stelsel vergelykings geen oplossing het nie:

$$2x - 2y - 2z = 4$$

$$ax + 2y + 2z = 7$$

$$-x + y + az = 1$$

### Oplossing

Dit beteken dat  $\det \mathbf{A} = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ a & 2 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Dus } 2(2a - 2) + 2(a^2 + 2) - 2(a + 2) = 0$$

$$2a - 2 + a^2 + 2 - a - 2 = 0$$

$$a^2 + a - 2 = 0, \text{ Dus } a = 1.$$

(Onthou vraag:  $a > 0$ )

## KOMPLEKSE GETALLE

Komplekse getalle kan op drie maniere geskryf word. Jy moet van enige van die drie na die ander kan verwerk. Jy moet ook bewerkings daarmee kan doen:

- 1 Reghoekvorm: plus, min, maal, deel.
- 2 Poolvorm: maal, deel, eksponente.
- 3 Eksponensiële vorm: maal, deel, eksponente.

Poolvorm en eksponensiële vorm het geen bewerkings nodig nie, dit is net ander manier van skryf:

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Die linkerkant is poolvorm en die regterkant eksponensiële vorm. Poolvorm kan ook kort geskryf word as  $rcis\theta$ .

### Skakel reghoekvorm om na poolvorm:

#### Voorbeeld 20

Skakel  $-\sqrt{3} + i$  om na poolvorm (of eksponensiële).

#### Oplossing

Heel eerste moet jy bepaal in watter kwadrant die getal lê. Hier is  $x$  negatief en  $y$  is positief.

Dus tweede kwadrant. Dus  $\theta = \pi$  –hoek ( $180^\circ$  –hoek).

$$\text{Hoek} = b \tan\left(\frac{y}{x}\right) = b \tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Dus } \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Die waarde van  $r$  word met Pythagoras bepaal:

$r^2 = x^2 + y^2$  en onthou teken maak nie saak nie:

$$r^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4, \text{ dus } r = 2.$$

Poolvorm:  $2cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ . Eksponensiële:  $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ .

## Skakel poolvorm om na reghoekvorm:

### Voorbeeld 21

Skakel  $\sqrt{2}cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$  om na reghoekvorm.

### Oplossing

Dis baie eenvoudig, solank jy net onthou dat  $x$  werk met  $cos$  en  $y$  met  $sin$ :

$x = \sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{4} = 1$  en  $y = \sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{4} = -1$  (doen op sakrekenaar, maak net seker gestel vir radiale)

Dus  $\sqrt{2}cis\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i$ .

### Bewerkings

### Voorbeeld 22

Bepaal  $\frac{3-4i}{5-2i}$  sodat die noemer rasionaal is.

### Oplossing

Hier vermenigvuldig mens met die toegevoegde van die noemer op ditself:

$$\frac{3-4i}{5-2i} \times \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{(3-4i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{23-14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i$$

Met poolvorm geld die volgende reëls:

- Doen met  $r$  wat die bewerking vra.
- Die hoeke word opgetel/ afgetrek as daar vermenigvuldiging/ deling is.
- Die hoek word vermenigvuldig as daar eksponente is.

### Voorbeeld 23

Bereken die waarde van  $(1 - \sqrt{3}i)^6$ . Doen die bewerking in eksponensiële vorm en gee die antwoord in reghoekvorm.

#### Oplossing

Die kwadrant is 4. Dit is dan makliker om met  $-\theta$  te werk.

$$\theta = -\text{bgtan}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3} \text{ en } r = 2.$$

$$\text{Dus } \left(2e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)^6 = 2^6 e^{\frac{-i\pi}{3} \times 6} = 64e^{-2i\pi}$$

$$x = 64 \cos(-2\pi) = 64 \text{ en } y = 64 \sin(-2\pi) = 0.$$

Antwoord dus 64.

### Voorbeeld 24

Bereken die waarde van  $\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{-\sqrt{3}+i}$ . Doen die bewerking in poolvorm en gee die antwoord in reghoekvorm.

#### Oplossing

Hierdie twee komplekse getalle is reeds in die vorige voorbeeld omgeskakel na poolvorm:

$$\frac{\left(2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^2}{2\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{4\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{2\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = 2\text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)$$
$$= 2\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{Dus } x = 2 \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \text{ en } y = 2 \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 2$$

Antwoord  $2i$

## Wortels van komplekse getalle

### Voorbeeld 25

Los op:  $x^3 = 1$ .

### Oplossing

Ons wil dus weet wat  $\sqrt[3]{1}$  is. Volgens Gauss moet daar drie antwoorde wees.

Doen dit met de Moivre se stelling. Daarvoor moet die getal in poolvorm wees. Skry eers reghoek vorm:  $z = 1 + 0i$  en in poolvorm  $z = 1cis(0)$ . Ons wil derdemagswortel van  $z$  kry (of tot die mag  $\frac{1}{3}$ )

Nou is dit 'n meetkundige feit dat mens  $360^\circ$  of  $2\pi$  radiale by hoek kan tel en die bly dieselfde getal, want op 'n diagram sal dit op dieselfde plek staan, soos bo genoem. Kom ons doen dit twee keer, sodat ons drie antwoorde het:

$z = 1cis(0) = 1cis(2\pi) = 1cis(4\pi)$ . (Tel  $2\pi$  twee keer by vorige hoek)

Hierdie drie getalle is presies dieselfde. Met de Moivre, kry ons die derdemagswortel van  $r$  en deel die hoek met 3:  $z = 1cis\left(\frac{0}{3}\right) = 1cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) = z = 1cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ .

Skakel om na reghoek vorm:

$$z = 1 \text{ of } z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Dit is presies dieselfde antwoorde as die algebraïese metode.

Gestel jy was onseker en het nog 'n keer  $2\pi$  bygetel:  $1cis(6\pi)$ .

Kry die derdemagswortel:  $1cis\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 1cis(2\pi)$ . Hierdie is dieselfde antwoord as die eerste antwoord wat ons gekry het.

# TRIGONOMETRIE

## INVERSE FUNKSIES

In alpha wiskunde is alle hoeke in radiale. Inverse funksies ruil  $x$  en  $y$  om. In enige trigonometriese funksie is  $x$  'n hoek en  $y$  'n getal. By die inverse funksies ruil dit dus om.

'n Probleem met inverse trigonometriese funksies is dat dit nie een tot een funksies is nie. Vir enige  $y$  waarde is daar oneindig baie  $x$  waardes. Om die inverse dus 'n funksie te maak, moet die oorspronklike trigonometriese funksie se gebied dus beperk word, sodat die inverse 'n funksie sal wees. Dit kon op verskeie maniere gedoen word, maar wiskundiges het op 'n vaste stelsel besluit, naamlik:

- $f(x) = \sin x$ :  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  met  $y \in [-1; 1]$
- $f(x) = \cos x$ :  $x \in [0; \pi]$  met  $y \in [-1; 1]$
- $f(x) = \tan x$ :  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  met  $y \in \mathbb{R}$

Hierdie  $x$  waardes word nou natuurlik die  $y$ -waardes van die inverse funksies. Verder word die  $y$ -waardes die  $x$  waardes van die inverse funksies. Met hierdie tipe vrae help dit om die gebied en terrein van die oorspronklike funksie neer te skryf en dit dan om te ruil vir die inverse funksie.

Alle translasies wat in skool wiskunde met die trigonometriese funksies gedoen word, kan met die inverse funksies ook gebeur.

### Voorbeeld 26

Bepaal die inverse funksie van  $f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$

### Oplossing

Ruil  $x$  en  $y$  om:  $x = 2 \sin(y - \frac{\pi}{3})$ , dus  $\sin(y - \frac{\pi}{3}) = \frac{x}{2}$

Dan  $y - \frac{\pi}{3} = \text{bgsin}(\frac{x}{2})$ ,  $\therefore f^{-1}(x) = \text{bgsin}(\frac{x}{2}) + \frac{\pi}{3}$

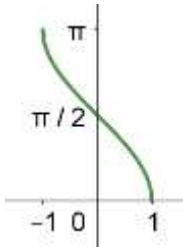
### Voorbeeld 27

Gegee:  $h(x) = b \cos\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{6}$

Skets die grafiek van  $h$ . Toon alle afsnitte met die  $x$ -asse en  $y$ -asse en koördinate van die eindpunte van die funksie duidelik aan.

### Oplossing

Dit is  $b \cos$  grafiek wat  $\frac{1}{2}$  eenheid na regs skuif en  $\frac{\pi}{6}$  eenhede afskuif. Die funksie  $y = b \cos x$  lyk so:



Dit sny die  $x$ -as by  $(1; 0)$  en die  $y$ -as by  $(0; \frac{\pi}{2})$ . Die eindpunte is by  $(-1; \pi)$  en  $(1; 0)$ .

Al vier hierdie punte moet nou  $\frac{1}{2}$  eenheid regs en  $\frac{\pi}{6}$  eenhede af skuif. Die vorm bly onveranderd.

DUS: eindpunte  $C(1\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{6})$ ,  $A(-\frac{1}{2}; \frac{5\pi}{6})$

Die afsnitte moet bereken word:

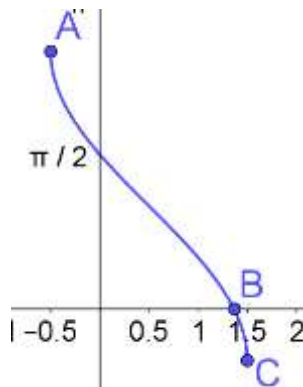
$y$ -afsnit:  $y = b \cos\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$  (bereken sommer op sakrekenaar).  $x$ -afsnit:

$$0 = b \cos\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Dus } b \cos\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6};$$

$$\therefore x - \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right);$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,4 \text{ (B)}. \text{ Skets:}$$



## TOEPASSING VAN RADIALE IN SEKTORE

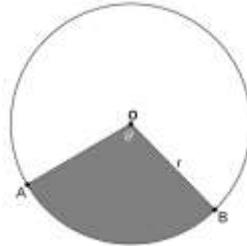
Hier is twee formules, op formuleblad, wat gebruik word:

$s = r\theta$ , waar  $s$  die booglengte is wat met radius  $r$  en hoek  $\theta$  gevorm word.

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$ , waar  $A$  die oppervlakte is van die sektor wat met radius  $r$  en hoek  $\theta$  gevorm word.

### Voorbeeld 28

Die skets toon 'n sirkel met middelpunt  $O$  en radius  $r$ .  $A$  en  $B$  is punte op die omtrek van die sirkel en hoek  $\widehat{AOB} = \theta$ . Die sektor wat geskakeer is se oppervlakte is 96 en die booglengte  $AB$  is gelyk aan 24.



- Bereken die radius van die sirkel.
- Bereken die grootte van hoek  $\theta$

### Oplossing

$S = r\theta = 24$ ,  $\theta = \frac{24}{r}$ . Verder is  $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ :

$$A = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{24}{r}\right) = 96, 12r = 96, r = 8.$$

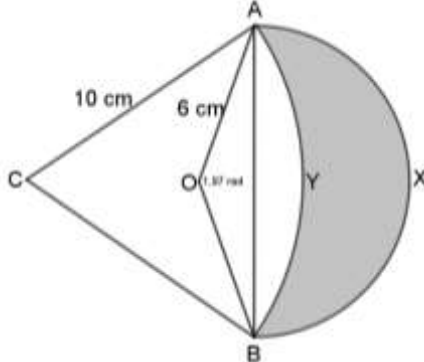
$$\theta = \frac{24}{8} = 3 \text{ rad.}$$

Soms moet trigonometrie se reëls vir driehoeke ook gebruik word.

### Voorbeeld 29

In die diagram is OAXB 'n sektor van 'n sirkel met middelpunt O en radius 6 cm. CAYB is 'n sektor van 'n ander sirkel met middelpunt C en radius van 10 cm.

$\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$  radiale en  $\widehat{AOB} = 1,97$  radiale.



- (a) Toon aan die oppervlakte van OAYB  $25,64 \text{ cm}^2$  is.  
(b) Bepaal vervolgens die oppervlakte van AXBY, die gearseerde gedeelte.

### Oplossing

(a) Sektor  $ACB = \frac{1}{2}(10^2) \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{50\pi}{3} = 52,3598$

Gebruik sinreël:

$$\Delta ACB = \frac{1}{2}(10^2) \sin \frac{\pi}{3} = 25\sqrt{3} = 43,3012$$

$$\Delta OAB = \frac{1}{2}(6^2) \sin(1,97) = 16,5846$$

$$\therefore \text{Area} = 52,36 - 43,30 + 16,58 = 25,64$$

(b) Sektor  $OAXB = \frac{1}{2}(6^2)(1,97) = 35,46$

$$\text{Area van gearseerde deel} = 35,46 - 25,64 = 9,82$$

# VEKTORE

Die volgende formules word op die formuleblad verskaf:

$ AB  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$		$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$
$ OP  = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} =  \mathbf{p}  \mathbf{q}  \cos \theta$	
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} =  \mathbf{a}  \mathbf{b}  \sin \theta \cdot \mathbf{n}$	$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$	
		$\alpha = \text{bgcos} \left( \frac{u_n}{ \mathbf{u} } \right)$

## Voorbeeld 30

Bepaal die afstand van punt P(2; -1; 7) na Q(1; -3; 5).

### Oplossing

$$|PQ| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 + 1)^2 + (5 - 7)^2} = 3$$

## Voorbeeld 31

Bepaal die vektor met oorsprong A (2; -3; 4) en eindpunt B (-2; 1; 1). Bepaal ook die grootte van die vektor.

### Oplossing

$$\mathbf{AB} = (-2 - 2; 1 - (-3); 1 - 4) = (-4; 4; -3).$$

$$\text{Grootte: } |\mathbf{AB}| = \sqrt{16 + 16 + 9} = \sqrt{41}$$

## Voorbeeld 32

Bepaal die eenheidsvektor van die  $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

### Oplossing

Die lengte van die vektor is  $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ . Dus is die eenheidsvektor, wat 'n vektor in dieselfde rigting as  $\mathbf{u}$  is maar met 'n grootte van 1, gelyk aan

$$\frac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \left( \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right)$$

## Voorbeeld 33

Bepaal die hoek wat hierdie vektor met die  $x$ -as maak.

### Oplossing

$$\alpha = \text{bgcos} \left( \frac{2}{3} \right) = 0,84 \text{ rad met die } x\text{-as.}$$

### Voorbeeld 34

Bepaal die puntproduk van vektore  $\mathbf{p}$  en  $\mathbf{q}$  gegee dat die hoek tussen die twee vektore  $\frac{\pi}{3}$  is en dat  $|\mathbf{p}| = 25$  eenhede en  $|\mathbf{q}| = 4$  eenhede.

### Oplossing

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = |\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos\theta = 25 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3} = 50$$

### Voorbeeld 35

Bepaal die punt produk van die vektore  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$  en  $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

**Let wel:** Die vraag kon ook wees:

$\mathbf{a} = (2; 5; -4)$  en  $\mathbf{b} = (-2; -3; -5)$

### Oplossing

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2 \times -2) + (5 \times -3) + (-4) \times (-5) = 1$$

### Voorbeeld 36

Bepaal die hoek wat gevorm word tussen die vektore

$$\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

$$\text{en } \mathbf{q} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

### Oplossing

Ons moet nou  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$  bereken en ook  $|\mathbf{p}|$  en  $|\mathbf{q}|$ .

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 13$$

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 7^2} = \sqrt{65} \text{ en}$$

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Dus is  $\theta = \text{bgcos} \frac{13}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{14}} = 1,13$  radiale.

### Voorbeeld 37

Bepaal  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  as  $\mathbf{a} = (2; 3; 4)$  en  $\mathbf{b} = (5; 6; 7)$

### Oplossing

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} &= \mathbf{i}(21 - 24) - \mathbf{j}(14 - 20) + \mathbf{k}(12 - 15) \\ &= -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \end{aligned}$$

**Voorbeeld 38**

Gegee  $\mathbf{a} = (-3; 1; -7)$  en  $\mathbf{b} = (0; -5; -5)$ . Bepaal eers of die vektore ewewydig is en indien nie, die oppervlakte van die parallelogram wat deur hulle gevorm word.

**Oplossing**

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \\ &= i(-5 - 35) - j(15 - 0) + k(15 - 0) \\ &= -40i - 15j + 15k\end{aligned}$$

Aangesien dit nie 0 is nie, is die vektore nie ewewydig nie en kan dit 'n parallelogram vorm.

Om die oppervlakte van die parallelogram wat tussen hierdie twee vektore gevorm word te bepaal, bereken ons die grootte van die kruisproduk:

$$\text{Oppervlakte} = \sqrt{1600 + 225 + 225} = 5\sqrt{82}$$

**Voorbeeld 39**

Gegee die vektore  $\mathbf{a} = (2; 3; -1)$  en  $\mathbf{b} = (0; -2; 5)$ . Bepaal 'n vektor wat loodreg op  $\mathbf{a}$  en  $\mathbf{b}$  is.

**Oplossing**

Die vektor loodreg op  $\mathbf{a}$  en  $\mathbf{b}$  is  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

$$\begin{aligned}\text{En } \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= i(15 - 2) - j(10 - 0) + k(-4 - 0) \\ &= 13i - 10j - 4k\end{aligned}$$

# DIFFERENSIASIE

## LIMIETE

Die volgende limiete word gebruik in die bepaling van horisontale asimptote:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x^2})}{x^2(\frac{1}{x} - 1)} = -2.$$

Vir kontinuïteit moet limiete van links en van regs bereken word. Verduidelik dit by kontinuïteit.

Verder is  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \pm\infty$ , dit bestaan nie.

## KONTINUÏTEIT

Die skryfwyse by hierdie afdeling is baie belangrik. Oefen dit sodat jy reg skryf. Meeste punte wat hier verloor word is a.g.v. verkeerde notasie.

'n Funksie is kontinu in 'n punt  $a$  indien

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Dit beteken dat drie goed moet waar wees:

- 1 Die limiet moet bestaan. Dit beteken gewoonlik dat die limiet van links moet gelyk wees aan die limiet van regs. Indien dit nie so is nie, is daar 'n sprong diskontinuïteit. Indien die limiet gelyk aan oneindigheid is, is daar 'n asimptotiese diskontinuïteit, soos by 'n hiperbool.
- 2 Daar moet 'n  $x$ -waarde wees, anders kan die  $y$ -waarde nie bestaan nie. Indien dit nie so is nie, is daar 'n verwyderbare diskontinuïteit.
- 3 Nommer 1 moet gelyk wees aan nommer 2. Indien dit nie so is nie, is daar 'n verwyderbare diskontinuïteit.

Al drie voorwaardes moet waar wees, vir 'n funksie om kontinu in 'n punt te wees. Slegs **een** van die

drie moet onwaar wees, vir 'n funksie om diskontinu te wees.

Om dus te **TOETS vir kontinuïteit**, word die volgende drie toetse uitgevoer:

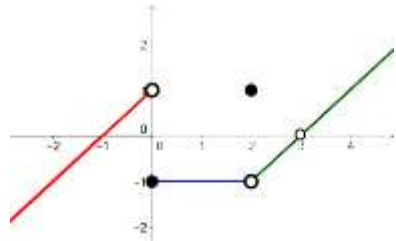
- 1 Bestaan  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  d.w.s. is  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ?  
(Die  $-$  is links en die  $+$ regs)
- 2 Bestaan  $f(a)$ , d.w.s. is daar 'n  $y$ -waarde en 'n  $x$ -waarde gedefinieer?
- 3 Is  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ? (dit beteken: Is nr. 1 se antwoord gelyk aan nr. 2?)

Hierdie probleme kan of met vergelykings, of met 'n skets gevra word.

#### Voorbeeld 40

Beskou die skets van 'n funksie:

Noem die punte waar die funksie diskontinu is, noem die tipe en gee 'n algebraïese rede.



#### Oplossing

$x = 0$ , sprong diskontinuïteit, want

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

$x = 2$ , verwyderbaar, want  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ .

$x = 3$ , verwyderbaar, want  $f(3)$  bestaan nie.

Kyk goed na die notasie vir die algebraïese redes.

### Voorbeeld 41

$$\text{Bestudeer } f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{as } x < 0 \\ 4 & \text{as } x = 0 \\ x^2 + 4 & \text{as } x > 0 \end{cases}$$

Bepaal of  $f(x)$  kontinu is by  $x = 0$ .

### Oplossing

**Punt 1:**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$  en  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$

Dit beteken dan dat:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$

**Punt 2:** Die funksie-waarde in die punt  $x = 4$   
 $\therefore f(0) = 4$ .

**Punt 3:**  $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Die funksie is dus **kontinu** in die punt  $x = 0$ .

### Voorbeeld 42

3  $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{as } x < \frac{\pi}{2} \\ x^2 + k & \text{as } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Bepaal die waarde van  $k$  sodat  $f$  oral **kontinu** sal wees.

### Oplossing

As  $f$  **kontinu** is, moet die **limiet bestaan** by  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Dit beteken dat die grafieke van  $\cos x$  en  $x^2 + k$  by mekaar moet uitkom by  $x = \frac{\pi}{2}$ . Om te "ontmoet"

moet die twee funksies dieselfde waarde hê by  $x = \frac{\pi}{2}$ :

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + k$$

$$\therefore 0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + k \implies k = -\frac{\pi^2}{4}$$

## DIFFERENSIEERBAARHEID

Vir 'n funksie om differensieerbaar te wees in 'n punt  $a$  moet die gradiënt van links gelyk wees aan die gradiënt van regs. Dit moet ook kontinuu in die punt wees. Algebraïes word dit geskryf as:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$$

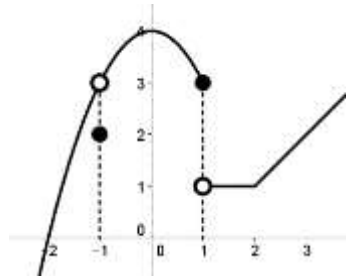
Indien die funksie kontinuu in die punt is, hoef daar net vir een ding getoets te word. Indien die funksie gegee word, moet beide kante gedifferensieer word. Maak wel seker dat die funksie kontinuu in die punt is.

### Voorbeeld 43

Bestudeer die skets en beantwoord die vrae:

Gee al die punte waar:

- 1 die linker- en regterlimiet nie gelyk aan mekaar is nie.
- 2 die limiet en die funksiewaarde bestaan maar dit nie gelyk aan mekaar is nie.
- 3 die funksie kontinuu maar nie differensieerbaar is nie.
- 4 die funksie nie differensieerbaar is nie.



### Oplossing

Hier word nie vir algebraïese redes gevra nie, slegs die punte.

- 1  $x = 1$
- 2  $x = -1$
- 3  $x = 2$
- 4 Al bg. punte.

### Voorbeeld 44

$$\text{Gegee: } f(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{as } x < 2 \\ 3 & \text{as } 2 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x + 5} & \text{as } x > 4 \end{cases}$$

Beantwoord die volgende vrae:

- 1 Is  $f(x)$  kontinu by  $x = 1$ ? Motiveer.
- 2 Is  $f(x)$  kontinu by  $x = 4$ ? Motiveer.
- 3 Is  $f(x)$  differensieerbaar by  $x = 1$  en  $x = 3$ ?  
Motiveer.

### Oplossing

- 1 Nee, want  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$  en  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$ .
- 2 Ja, want  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$  en  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 3$ ,  $f(4) = 3$ ,  
Dus  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$ .
- 3  $x = 1$ : Nee, want nie kontinu nie.

$$x = 4: \lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = \frac{1}{2}(4 + 5)^{-\frac{1}{2}}$$

Nee, nie differensieerbaar nie.

### Voorbeeld 45

$$\text{Gegee: } f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{as } x \leq 3 \\ bx^2 + 4 & \text{as } x > 3 \end{cases}$$

Bepaal die waardes van  $a$  en  $b$  sodat die volgende funksie **differensieerbaar** is vir alle waardes van  $x$ .

### OPLOSSING

Vir 'n funksie om differensieerbaar te wees, moet dit ook kontinuu wees.

Dus  $f$  moet **kontinuu** wees in die punt  $x = 3$ :

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$2(3) + a = b(3)^2 + 4$$

$$a - 9b = -2$$

En  $f$  moet **differensieerbaar** wees in die punt  $x = 3$ :

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{as } x \leq 3 \\ 2bx & \text{as } x > 3 \end{cases} \quad \boxed{\text{Differensieer } f'(x) \text{ te kry}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x)$$

$$2 = 2b(3)$$

$$b = \frac{1}{3}$$

$$\text{En dus } a - 9\left(\frac{1}{3}\right) = -2 \Rightarrow a = 1$$

## GEBRUIK DIFFERENSIASIE REËLS

Die reëls word in die tabel saam met die afgeleides van funksies gegee.

$$\text{Produkreël: } \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\text{Kwosiëntreël: } \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\text{Kettingreël: } \frac{d}{dx} f[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

### Voorbeeld

$$\text{Bepaal } \frac{d}{dx} [\sin x \cdot (5x^2 + 2x)]$$

### Oplossing

$$f(x) = \sin x \qquad g(x) = 5x^2 + 2x$$

$$f'(x) = \cos x \qquad g'(x) = 10x + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx} [\sin x \cdot (5x^2 + 2x)] \\ = \cos x (5x^2 + 2x) + \sin x (10x + 2) \end{aligned}$$

Al die stappe is hier verduidelik, in die eksamen hoef slegs die antwoord geskryf te word. Dit geld vir volgende voorbeeld ook.

### Voorbeeld 46

$$\text{Bepaal die volgende: } D_x \left[ \frac{\sin x}{2x+1} \right]$$

### Oplossing

$$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$$

$$g(x) = 2x + 1 \qquad g'(x) = 2$$

$$\therefore D_x \left[ \frac{\sin x}{2x+1} \right] = \frac{\cos x \cdot (2x+1) - \sin x \cdot 2}{(2x+1)^2}$$

Let op na die skryfwyse. Punte word dikwels verloor vir verkeerde notasie.

### Voorbeeld 47

Bepaal  $\frac{d}{dx} [\tan(2x^3 - x)]$

### Oplossing

$$\sec^2(2x^3 - x) \times (6x^2 - 1)$$

## EKSPONENTE EN LOGARITMES

Die volgende formules verskein op die formuleblad:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a \text{ en } \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Twee spesiale gevalle is  $e^x$  en  $\ln x$ . Dit kan uit hierdie formules afgelei word, onthou dat  $\ln e = 1$ :

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \cdot \ln e = e^x \text{ en } \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x \cdot \ln e} = \frac{1}{x}$$

Wanneer enige uitdrukking met logaritmes gedifferensieer moet word, is dit **ALTYD** makliker om dit eers uit te brei met die logaritme wette.

### Voorbeeld 48

Bepaal  $f'(x)$  as  $f(x) = 2^{5x} + \log \frac{x^2+1}{\sin^5 x}$

### Oplossing

Brei die logaritme deel uit:

$$f(x) = 2^{5x} + \log(x^2 + 1) - 5 \log(\sin x)$$

$$f'(x) = 2^{5x} \cdot 5 \cdot \ln 2 + \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \ln 10} \cdot 2x - \frac{1}{\sin x \cdot \ln 10} \cdot \cos x$$

## IMPLISIETE DIFFERENSIASIE

Dit word gebruik wanneer  $y$  nie alleen geskryf kan word nie. Hier mag jy die skryfwyse  $y'$  gebruik in die plek van  $\frac{dy}{dx}$ . Wees op die uitkyk vir die produk- en kwosiënt reëls. Onthou die volgende:

funksie	konstante	$x$	$y$	$xy$	$y^2$	$\sin y$	$\pi$
afgeleide	0	1	$y'$	$y + xy'$	$2y \cdot y'$	$\cos y \cdot y'$	0

Die proses verloop as volg:

- Differensieer elke term.
- Bring al die terme met  $y'$  na een kant.
- Haal  $y'$  gemeenskaplik uit.
- Deel beide kante met hakie.

Die deel word dikwels gekombineer met raaklyne.

Onthou dat  $m = y'$ .

Verder word die formule  $y - y_1 = m(x - x_1)$  gebruik.

### Voorbeeld 49

Gebruik implisiete differensiasie en bepaal  $\frac{dy}{dx}$  en dan die vergelyking van die raaklyn aan die kurwe  $y^2 e^{2x} = 3y + x^2$  by die punt  $(0; 3)$ .

### Oplossing

Differensieer eers, oppas vir eerste term wat produk is:

$$2y \cdot y' \cdot e^{2x} + y^2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 3y' + 2x$$

Alle terme met  $y'$  na links:

$$2y \cdot y' \cdot e^{2x} - 3y' = 2x - y^2 \cdot e^{2x} \cdot 2$$

Haal  $y'$  gemeenskaplik uit:

$$y'(2y \cdot e^{2x} - 3) = 2x - y^2 \cdot e^{2x} \cdot 2$$

$$\text{Deel: } y' = \frac{2x - y^2 \cdot e^{2x} \cdot 2}{2y \cdot e^{2x} - 3}$$

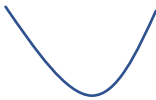
Nou is daar klaar gedifferensieer. Om nou vergelyking van raaklyn te bepaal, vervang  $(0; 3)$  in  $y'$  om  $m$  te kry:

$$m = y' = \frac{0 - 9 \cdot e^0 \cdot 2}{6 \cdot e^0 - 3} = -\frac{18}{3} = -6$$

$$y - y_1 = m(x - x_1), \quad y - 3 = -6(x - 0), \quad \therefore y = -6x + 3$$

## HOËR ORDE AFGELEIDES

Wanneer 'n funksie gedifferensieer word, ontstaan die eerste afgeleide,  $f'(x)$ . Wanneer hierdie afgeleide gedifferensieer word, ontstaan die tweede afgeleide,  $f''(x)$ .  $f'(x)$  gee die waarde van die gradiënt by enige punt op die grafiek van  $y = f(x)$ . As dit dus positief is, styg die grafiek.  $f''(x)$  gee die waarde van die gradiënt op die grafiek van  $y = f'(x)$  op enige plek. Die tweede afgeleide sê iets oor die vorm van  $f(x)$ . As  $f''(x)$  positief is, is die grafiek se gradiënt besig om al hoe groter te word. Dit word konkaf op genoem:



Let op dat die gradiënt van hierdie grafiek al hoe groter word.

As  $f''(x)$  negatief is, is die grafiek se gradiënt besig om al hoe kleiner te word. Dit word konkaf af genoem:



Grafieke kan stasionêre punte en buigpunt hê. Jy moet weet wat die verskil tussen die twee is, op 'n grafiek of algebraïes.

'n **Stasionêre punt** ontstaan wanneer  $f'(x) = 0$ . Dit kan een van 3 vorms hê:

Minimum draaipunt,  waar  $f''(x) > 0$

Maksimum draaipunt  waar  $f''(x) < 0$

Buigpunt (Of Infleksie punte) waar  $f''(x) = 0$



'n Buigpunt ontstaan wanneer  $f''(x) = 0$ , maar  $f''$  moet van teken verander oor hierdie punt, bv. van + na -. Indien die nie gebeur nie, is dit nie 'n buigpunt nie.

Daar is twee soorte buigpunte:

Die wat ook stasionêr is, dus  $f'(x) = 0$ .



Die wat nie stasionêr is nie, dus  $f'(x) \neq 0$ . Hierdie tipe kan duidelik by derdegraadse grafieke gesien word, waar die grafiek “buig”:



Dit is duidelik nie 'n stasionêre punt nie.

Jy moet hierdie konsepte leer en onthou.

### Voorbeeld 50

Gegee  $f(x) = x^4 - x^3 - x$ . Bepaal alle moontlike stasionêre- en draaipunte van  $f$ . Gee ook die tipe stasionêr, indien enige.

### Oplossing

**Stasionêr:**  $f'(x) = 0$ , dus  $4x^3 - 3x^2 - 1 = 0$

$x = 1$  is 'n oplossing, dus  $(x - 1)(4x^2 + x + 1) = 0$

$x = 1$  enigste reële oplossing.

Om tipe te bepaal, moet die 2e afgeleide bepaal word en kyk of dit positief of negatief is as  $x = 1$ :

$$f''(x) = 12x^2 - 6x; f''(1) = 12 - 6 = 6 > 0$$

Dus is daar 'n minimum draaipunt by  $x = 1$ .

**Buigpunt:**  $f''(x) = 0$ , dus  $12x^2 - 6x = 0$

$$\therefore 6x(2x - 1) = 0; \text{ Dus } x = 0 \text{ of } x = \frac{1}{2}.$$

Toets nou deur na die teken van  $f''$  te kyk weerskante van hierdie punte:

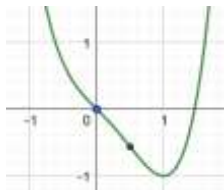
$$x = 0: f''(-1) = 18 > 0 \text{ en } f''\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4} < 0. \text{ Verskil.}$$

$$x = \frac{1}{2}: f''\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4} < 0 \text{ en } f''(1) = 6 > 0. \text{ Verskil.}$$

Die funksie het dus 'n minimum stasionêre punt

(draaipunt) by  $x = 1$  en buigpunte by  $x = 0$  en  $x = \frac{1}{2}$ .

Let op dat hierdie 2 buigpunte nie stasionêr is nie. Die grafiek lyk so, buigpunte aangetoon:



## NEWTON SE METODE

Newton se metode is 'n manier om 'n funksie se nulpunte, of afsnitte met die  $x$ -as, te bepaal indien dit nie andersens bepaal kan word nie. Die snypunt van twee grafieke kan ook hiermee bepaal word, indien dit as een formule geskryf word. Die formule verskyn op die formuleblad:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

In die eksamen moet jy die afgeleide bepaal. Dan moet jy ook alles in die formule vervang. Dit is nie nodig om al die benaderings neer te skryf nie, slegs die finale antwoord. Maak seker hoeveel desimale syfers gevra is.

### Voorbeeld 51

Gebruik Newton se metode en bepaal die  $x$ -waarde, korrek tot 4 syfers, van die snypunt van die grafieke  $y = \tan(2x)$  en  $y = \sqrt{x}$  in die interval  $x \in (\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4})$ .

Gebruik  $x = \pi$  as eerste benadering.

### Oplossing

Skep 'n funksie:  $f(x) = \tan(2x) - \sqrt{x}$ . Hierdie funksie se nulpunt sal die snypunt van die twee grafieke wees.

$$f'(x) = \sec^2(2x) \cdot 2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Dus  $a_{n+1} = a_n - \frac{\tan(2a_n) - \sqrt{a_n}}{\sec^2(2a_n) \cdot 2 - \frac{1}{2}a_n^{-\frac{1}{2}}}$  met  $a_n = \pi$ .

Sleutel  $\pi =$  op jou sakrekenaar in. Tik nou die formule soos dit hier staan en gebruik telkens die "Ans" knoppie waar daar  $a_n$  staan. Druk nou die = totdat die antwoord dieselfde bly en skryf dit dan met die regte aantal desimale:

$$x \approx 6,8865$$

## OPTIMERING

Hierdie is dieselfde as wat in skool wiskunde is, waar die maksimum of minimum van 'n uitdrukking gevra word. Al verskil is dat enige funksie wat in Alpha gedifferensieer kan word, hier gevra kan word. Die beginsel is dieselfde: Differensieer, stel gelyk aan nul en los op. Dit is gewoonlik nie nodig om aan te toon dat dit 'n maksimum of minimum is nie, tensy die vraag spesifiek daarvoor vra. Indien die minimum/maksimum waarde gevra word, moet die antwoord in die oorspronklike funksie vervang word.

### Voorbeeld 52

Bepaal die minimum waarde van  $f(x) = e^{2x} - x$

### Oplossing

$$f'(x) = 2e^{2x} - 1 = 0. \text{ Dus } e^{2x} = \frac{1}{2}; \therefore 2x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Dit gee  $x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2} \approx -0,35$ . Dus minimum van 0,85.

## SKETS VAN RASIONALE FUNKSIES

'n Rasionale funksie is 'n funksie in breukvorm met onbekendes in die noemer. Voorbeelde sluit in:

$$y = \frac{2}{x} - 4; y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

Hierdie funksies het gewoonlik asimptote, soms draaipunte en afsnitte met die asse. Al drie hierdie moet bereken word om die funksie te skets. Trek heel eerste die asimptote. Merk dan die moontlike draaiunte en afsnitte met die asse. Indien jy nie hiermee die funksie kan skets nie, gebruik jou sakrekenaar se "Mode-Table" en kry nog 'n paar punte op die grafiek. Onthou die volgende oor asimptote:

- Die vertikale asimptote is as die funksie ongedefinieerd is, dus as daar met nul gedeel word. Hierdie asimptoot kan NOOIT deur die funksie gesny word nie. Die vertikale simptoot kan bereken word met die formule  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ . Jy hoef nie hierdie formule te ken nie, maar as dit gegee word, moet jy verstaan wat dit beteken.
- Die funksie kan of 'n horisontale, of 'n skuins asimptoot hê NOOIT beide nie. Hierdie asimptote kan deur die funksie gesny word, naby  $x = 0$ , want dit vorm eintlik as  $x \rightarrow \pm\infty$ .
- Die funksie het 'n skuins asimptoot indien die graad van die teller een meer is as die graad van die noemer. Indien dit gelyk of kleiner is, is daar 'n horisontale asimptoot.

Die horisontale asimptoot kan bereken word met die formule  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ .

Die skuins asimptoot kan bereken word met die formule  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (mx + c)) = 0$ . Jy hoef ook nie hierdie formule te ken nie, maar as dit gegee word, moet jy verstaan wat dit beteken.

### Voorbeeld 53

Skets  $f(x) = \frac{x^2-x}{x+1}$ .

#### Oplossing

##### Asimptote:

Vertikaal as  $x + 1 = 0$ , dus  $x = -1$ .

Die graad van die teller is groter as die graad van die noemer, dus skuins. Doen langdeling of sintetiese

deling:  $(x^2 - x) \div (x + 1) = x - 2 + \frac{2}{x+1}$  (Die res is nie nodig nie). Die skuins asimptoot is  $y = x - 2$ .

##### Draaipunte:

$$f'(x) = 0, \therefore \frac{(2x - 1)(x + 1) - (x^2 - x) \cdot 1}{(x + 1)^2} = 0$$

Dit gee  $x^2 + 2x - 1 = 0$ . Gebruik formule of sakrekenaar:  $x = -2,41$  of  $x = 0,41$ . Vervang in  $f$ :  $y = -5,83$  of  $y = -0,17$ .

Dus  $(-2,41; -5,83)$  en  $(0,41; -0,17)$

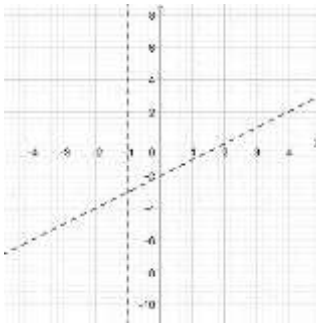
##### Afsnitte:

Vir  $x$ :  $\frac{x^2-x}{x+1} = 0$ , dus  $x(x - 1) = 0$ ;  $\therefore x = 0$  of  $x = 1$

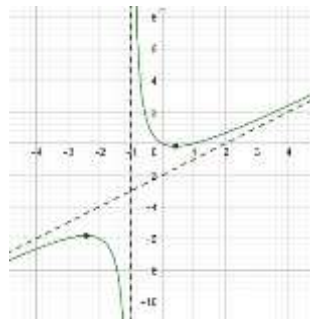
Vir  $y$ :  $y = \frac{0-0}{0+1} = 0$

##### Skets:

Doen eers die asimptote:



Merk nou die afsnitte en draaipunte en skets:



### Voorbeeld 54

Die volgende is bekend van die funksie  $y = f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty \text{ en } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2.$$

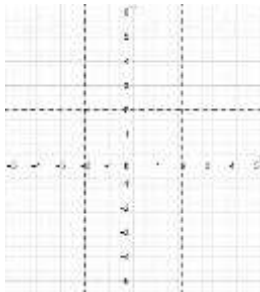
Die funksie het 'n maksimum draaipunt by  $(0; -1)$ . Dit sny die  $y$ -as by  $y = -1$  maar het geen  $x$ -afsnitte nie.

Maak 'n sketsgrafiek van  $y = f(x)$ .

### Oplossing

Begin met die asimptote:

Vertikaal by  $x = \pm 2$  en horisontaal by  $y = 2$ :

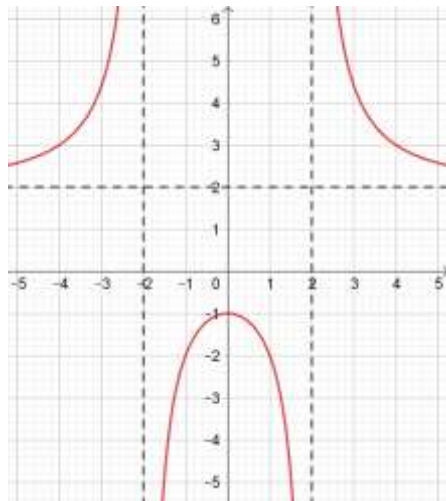


Merk nou draaipunt, dit is ook

$y$ -afsnit. Geen  $x$ -afsnitte nie.

Verder mag die vertikale asimptote nie gesny word nie. Die draaipunt

is maksimum. Trek die grafiek:



# INTEGRASIE

## TABEL

Om die tabel vir integrasie te gebruik, moet jy van regs na links werk. Dit werk ook as die  $x$  met 'n lineêre funksie vervang word, dan moet daar gedeel word met die afgeleide van die lineêre funksie. Die  $x$  mag egter nie met enige ander funksie vervang word nie, daar is ander metodes om dit dan te doen.

### Voorbeeld 55

Bepaal  $\int \sin 5x \, dx$

### Oplossing

**sin x** staan regs in formuleblad:

cos x	- sin x
-------	---------

Maar die  $x$  is nou  $5x$ , wat 'n lineêre funksie is. Die afgeleide daarvan is **5**. Die antwoord is dus:

$$\int \sin 5x \, dx = \frac{-\cos 5x}{5} + k$$

## TRIGONOMETRIESE IDENTITEITE

Indien daar trigonometriese funksies in die integraal is, maar nie soos die vorige voorbeeld nie, kan daar soms van identeite gebruik gemaak word. Die volgende identeite is op die formuleblad, toon slegs die wat met integrasie gebruik word:

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)] \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$$

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

### Voorbeelde 56

Bepaal die volgende integrale:

$$1 \int \tan^2 x \, dx \quad 2 \int \cos^2 x \, dx \quad 3 \int \sin 5x \cdot \cos 2x \, dx$$

### Oplossings

1 Hier word die identiteit  $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$  gebruik, want daar is nie 'n  $\tan^2 x$  regs nie, wel 'n  $\sec^2 x$ :

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x + k$$

2 Hier word die identiteit  $\cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$  gebruik, want dit verander na lineêre funksie:

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)] \, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right] + k$$

3 Hier word die identiteit

$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$  gebruik, want dit verander ook na lineêre funksie:

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \cdot \cos 2x \, dx &= \int \frac{1}{2}[\sin(5x + 2x) + \sin(5x - 2x)] \, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 7x}{7} - \frac{\cos 3x}{3}\right] + k \end{aligned}$$

## FAKTOR INTEGRASIE

Dit staan ook bekend as stuksgewyse integrasie. Daar is nie 'n produkreël vir integrasie soos by differensiasie nie. Hierdie metode kan gebruik word indien die produk van twee funksies geïntegreer moet word. Die volgende formule, op die formuleblad, word gebruik:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx + k$$

Wat hier baie belangrik is, is dat een van die twee funksie moet integreerbaar wees, want die  $g'$  wat aan die linkerkant staan, word 'n  $g$  aan die regterkant, wat die integraal van  $g$  is. Dit is belangrik, want jy moet kies wat is  $f$  en wat is  $g'$ . 'n Redelike algemene reël is dat as een van die funksies  $x$  is, kies dit as  $f$ , want dit moet gedifferensieer word en die afgeleide van  $x$  is gelyk aan 1.

### Voorbeeld 57

Bepaal  $\int x \cdot \sin x dx$

### Oplossing

Besluit wat om te kies as  $f$  en  $g'$ . Die  $\sin x$  kan integreer, dus kies:

$$f(x) = x \text{ en } g'(x) = \sin x.$$

Dan is  $f'(x) = 1$  en  $g(x) = -\cos x$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx + k$$

$$\text{Dus } \int x \cdot \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot -\cos x dx$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + k$$

## INTEGRASIE MET PARSIEËLE BREUKE

By hierdie vrae sal daar altyd 'n aanduiding wees dat jy partiële breuke moet gebruik.

### Voorbeeld 58

Bepaal  $\int \frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+1)} dx$  deur van partiële breuke gebruik te maak.

### Oplossing

$$\text{Stel } \frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\text{Dus } x^2 + 3 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

$$\text{Stel } x = 1: 4 = A(2); A = 2$$

$$\text{Kyk na } x^2: 1 = A + B, \text{ dus } B = -1$$

$$\text{Kyk na konstante: } 3 = A - C, \text{ dus } C = -1$$

$$\text{Dus } \int \frac{2}{x-1} dx - \int \frac{x+1}{x^2+1} dx \quad \text{Skei die 2e breuk:}$$

$$\int \frac{2}{x-1} dx - \int \left( \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= 2\ln(x-1) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} - \text{bgtan}x + k$$

Die deel wat met geel geskaker is, word in die volgende afdeling verduidelik.

## INTEGRASIE MET SUBSTITUSIE

Hierdie integrale is in die vorm van 'n produk of 'n breuk. Daar is altyd twee funksies en die een is die afgeleide van die ander. Substitusie kan gebruik word, alhoewel dit ook daarsonder gedoen kan word. Dit word hier verduidelik met substitusie.

### Voorbeeld 59

Bepaal  $\int \frac{x}{x^2+1} dx$  (Dit is vb uit vorige afdeling)

### Oplossing

Die  $x$  is die afgeleide van  $x^2 + 1$ , met konstantes wat sal regkom. Stel altyd die funksie waarvan die afgeleide daar is gelyk aan  $u$ . Dan differensieer mens  $u$  met betrekking tot  $x$ . Dit sal dan die ander funksie gee. Vervang dan in die integraal – jy is reg indien daar geen  $x$ 'e in is nie.

Dus  $u = x^2 + 1$ . Differensieer nou:

$\frac{du}{dx} = 2x$  en maak  $dx$  die onderwerp:

$$du = 2x \cdot dx, \therefore dx = \frac{du}{2x}$$

Vervang nou in die integraal:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx \text{ word } \int \frac{x}{u} \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2u} du$$

Dis reg want daar is geen  $x$  in nie.

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u + k$$

Vervang die  $u = x^2 + 1$ : Antwoord  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + k$

## OPPERVLAKTE MET INTEGRASIE

Die oppervlakte tussen 'n grafiek en die  $x$ -as tussen twee punte kan bereken word met 'n bepaalde integraal. Indien die grafiek tussen twee grafieke bereken moet word, trek onderste van boonste af en bereken bepaalde integraal tussen grafieke se sny punte. As jy nie weet watter een bo is nie, doen dit met enige een. Jou antwoord sal negatief wees as jy die verkeerde een gekies het. 'n Oppervlakte onder die  $x$ -as is altyd negatief. Indien die grafiek die  $x$ -as sny, moet dit as twee aparte bepaalde integrale bereken word. Dit is nie nodig indien dit die oppervlakte tussen twee grafieke is nie. By hierdie probleme sal die oppervlakte dikwels gegee word en een van die punte se waardes gevra word.

### Voorbeeld 60

Die oppervlaktes tussen die grafieke  $f(x) = (x + 2)^2$  en  $g(x) = \frac{1}{x+2}$  tussen die punte  $x = -1$  en  $x = 1$  is gelyk aan  $\frac{26}{a} - \ln a$ . Bereken die waarde van  $a$ . Toon al jou stappe.

### Oplossing

$$\begin{aligned}\text{Oppervl} &= \int_{-1}^1 \left[ (x + 2)^2 - \frac{1}{x+2} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} (x + 2)^3 - \ln(x + 2) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{3} (3)^3 - \ln 3 - \left( \frac{1}{3} (1)^3 - \ln 1 \right) \\ &= 9 - \ln 3 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} - \ln 3. \text{ Dus } a = 3\end{aligned}$$

## VOLUME VAN OMWENTELINGSLIGGAME

Die formule wat hier gebruik word, is op die formule

$$\text{blad: } V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Indien die volume tussen twee grafieke bepaal moet word, moet elkeen apart bepaal word en die antwoorde van mekaar afgetrek word.

### Voorbeeld 61

Die grafiek van  $f(x) = \sqrt{2x - 4}$  roteer om die  $x$ -as, tussen  $x = p$  en  $x = 10$ . Die volume van die omwentelingsliggaam wat so gevorm word, is gelyk aan  $64\pi$ . Bereken die waarde van  $p$ .

### Oplossing

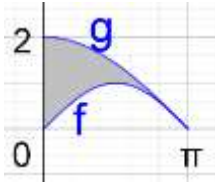
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx, \text{ en } [f(x)]^2 = \sqrt{2x - 4}^2 = 2x - 4$$

$$\text{Dus } V = \pi \int_p^{10} 2x - 4 dx = 64\pi$$

$$\text{Dit gee } x^2 - 4x \Big|_p^{10} = 100 - 40 - (p^2 - 4p) = 64$$

$$\text{Dus } p^2 - 4p + 4 = 0, \text{ dus } p = 2$$

### Voorbeeld 62



Die skets toon die grafieke van  $f(x) = \sin x$  en  $g(x) = 2 \cos \frac{x}{2}$ .

Bepaal die volume van die omwentelingsliggaam wat gevorm word deur die gebied tussen die twee

grafieke, wat geskakeer is. Toon alle stappe.

Oplossing

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left( \left[ 2 \cos \frac{x}{2} \right]^2 - [\sin x]^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \left( \frac{4 \cdot 1}{2} [1 + \cos(2x)] - \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)] \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[ 4 \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) - \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} (3\pi - 0)$$

$$= \frac{3\pi^2}{2}$$

## DIE RIEMANN SOM

Dit word gebruik om die oppervlakte tussen 'n grafiek en die  $x$ -as te bepaal, of die waarde van 'n integraal, sonder om te integreer. Wat hier gebeur is dat die oppervlakte in 'n klomp reghoeke met gelyke breedte verdeel word. Dit word bereken en dan word die aantal reghoeke vmeerder na oneindig. Dit gee dan die werklike oppervlakte. Die formule op die blad is:

Riemannsom / *Riemann sum* =  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$

Die volgende formules word ook hier gebruik:

$$\sum_{i=1}^n 1 = n \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Die probleme kan in 6 stappe verdeel word:

### STAP 1

Bepaal die breedte van elke blokkie. Daar is  $n$  verdelings in die interval  $[a; b]$ , dus sal elkeen  $(b - a) \div n$  lank wees. Al die blokkies gaan presies dieselfde breedte hê. Dit word as volg geskryf:

$$\Delta x_i = \frac{b - a}{n}$$

### STAP 2

Bepaal die waarde van die  $i$ 'de blokkie op die  $x$ -as:

$$x_i = \text{beginpunt} + \text{breedte} \times i$$

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i = a + \Delta x_i \cdot i$$

### STAP 3

Bepaal die hoogte (of lengte) van elke blokkie.

Dit is die  $y$ -waarde by elke verdelingspunt.

Omdat die punte  $x_i$  is sal die  $y$ -waarde dus

$f(x_i)$  wees.

### STAP 4

Hier moet besef word dat  $\Delta x_i$  nie 'n  $i$  in het nie en dus gemeenskaplik uit die som gehaal kan word. Bepaal die som van al die hoogtes. Dit word geskryf as

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)$$

## STAP 5

Vermenigvuldig die basis van al die blokkies met die som van die hoogtes:

Oppervlakte = basis x som van die hoogtes

= **STAP 1** x **STAP 4**

$$\Delta x_i \times \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Gebruik die formules wat op die formuleblad, wat aan begin gegee is, om te vereenvoudig:

## STAP 6

'n Oneindige aantal reghoeke:

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\textit{basis} \times \sum \textit{hoogtes}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \textit{STAP 5} \end{aligned}$$

Dus die formule vir Riemanssom:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

En wat ons kan verander na

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \times \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Hier sal alles waar daar nog 'n  $n$  in die noemer is, 0 word. Daar mag in hierdie stap geen  $n$  in die teller wees nie, indien daar is, het jy fout gemaak.

### Voorbeeld 63

Gebruik 'n Riemansom en bepaal  $\int_0^2 -x^2 + x + 2 dx$

#### Oplossing

Stap 1:  $\Delta x_i = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

Stap 2:  $x_i = 0 + \Delta x_i \cdot i = \frac{2i}{n}$

Stap 3:  $f\left(\frac{2i}{n}\right) = -\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \frac{2i}{n} + 2 = -\frac{4i^2}{n^2} + \frac{2i}{n} + 2$

Stap 4:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) = \sum_{i=1}^n -\frac{4i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n} + \sum_{i=1}^n 2$$

Haal alles wat nie  $i$  is nie gemeenskaplik uit:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) = -\frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i + 2 \sum_{i=1}^n 1$$

Gebruik die formules:

$$= -\frac{4}{n^2} \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) + \frac{2}{n} \left( \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right) + 2(n)$$

Stap 5:

$$\begin{aligned} \Delta x_i \times \sum_{i=1}^n f(x_i) \\ = \frac{2}{n} \left[ -\frac{4}{n^2} \left( \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) + \frac{2}{n} \left( \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right) + 2(n) \right] \end{aligned}$$

Vereenvoudig:  $-\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n} + 2 + \frac{2}{n} + 4$

Stap 6:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i = -\frac{8}{3} + 2 + 4 = \frac{10}{3}$$

As jy kan, toets op jou sakrekenaar.