

# $\alpha$ -WISKUNDE

## Alpha Wiskunde

### Memorandum finale eksamen 2019

Graad 11

Eksaminator: R Grobler

Moderator: A Muller

Tyd: 2 ½ ure

Totaal: 165 punte

Vraag 1

[20 punte]

1.1	A	B	C	D
1.2	A	B	C	D
1.3	A	B	C	D
1.4	A	B	C	D
1.5	A	B	C	D
1.6	A	B	C	D
1.7	A	B	C	D
1.8	A	B	C	D
1.9	A	B	C	D
1.10	A	B	C	D

NR. NO	ANTWOORD ANSWER	BEREKENINGE (nie vir nasien doeleindes nie) CALCULATIONS (not for marking purpose)	PUNTE MARKS
1.1	C	$- x - 5  - 7 \leq 0.$ $- x - 5  < 7$ $\therefore$ Dit is altyd waar. Dus $x \in \mathbb{R}$	2
1.2	B	$y = bgtanx$ Skuif $\frac{\pi}{2}$ eenhede opwaarts, $(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$ vergroot met 'n faktor van 2, Dus $y \in [0; 2\pi]$	2
1.3	D	$x = y^5 - 1; y^5 = x + 1; \text{Dus } y = \sqrt[5]{x + 1}$	2
1.4	A	By $x = 0$ het die funksies dieselfde waarde. By $x = 1$ is dit heeltemal verskillend, dus sprong.	2
1.5	A	'n Funksie wat differensieerbaar is vir alle waardes van $x$ , sal ook kontinuu wees vir alle waardes van $x$ . Dit is al stelling wat waar is.	2
1.6	D	$ -2x  < 1$ $ x  < \frac{1}{2}$	2
1.7	B	$\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = bgtan2x \cdot \frac{1}{2} + k$	2
1.8	C	$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \text{Dus } f'(x) = \frac{1}{3}(x)^{-\frac{2}{3}}$ $f'(-8) = \frac{1}{3}(-8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}$	2
1.9	D	$\sqrt{4 + 9 + a^2} = \sqrt{38}, \text{Dus } a^2 = 25. a = \pm 5. \text{Net D het een van hierdie antwoorde.}$	2
1.10	C	$\int_a^0 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx = \int_a^0 \sqrt{(x - 1)^2} dx$ $= \int_a^0 (x - 1) dx = \frac{x^2}{2} - x \Big _a^0 = 0 - \left(\frac{a^2}{2} - a\right) = a - \frac{a^2}{2}$	2

## Vraag 2

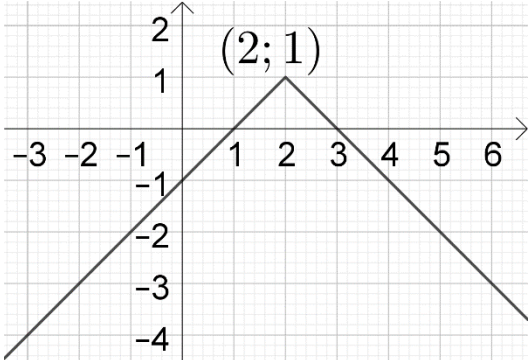
[15 punte]

2.1 Los op vir  $x$ :

(a)  $|3 - 2x| < 7$  (4)

(b)  $|x + 2| = -3x + 6$  (6)

2.2 Skets die grafiek van  $y = 1 - |x - 2|$ . Dui alle afsnitte met die asse en die knakpunt duidelik aan op die skets. Gebruik **DIAGRAMBLAD 1** vir die skets. (5)

2.1 (a)	$-7 < 2x - 3 < 7$ ✓✓ $-4 < 2x < 10$ ✓ $-2 < x < 5$ ✓	2: Dubbel ongelykheid 1: +3 1: Antwoord <b>[4]</b>
(b)	As $x \geq -2$ : ✓ $x + 2 = -3x + 6$ ✓ $x = 1$ ✓ As $x < -2$ : ✓ $-x - 2 = -3x + 6$ ✓ $x = 4$ , nvt. ✓	1: Voorwaarde 1: Uit abs waarde 1: Antwoord 1: Voorwaarde 1: Uit abs waarde 1: Antwoord, nvt. <b>[6]</b>
2.2	$x:  x - 2  = 1, x = 3$ ✓ of $x = 1$ ✓ $y: y = -1$ ✓ Knakpunt: $(2; 1)$ ✓ Vorm: ✓ 	5: Soos getoon, op skets. Berekeninge hoef nie getoon te word nie. <b>[5]</b>

**Vraag 3**

**[19 punte]**

- 3.1 Faktoriseer  $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 2$  in  $\mathbb{R}[x]$  as dit gegee is dat  $-2 + \sqrt{2}$  'n nulpunt is. (8)
- 3.2 Bepaal die 6'de term in die uitbreiding van  $\left(\frac{1}{2} - 4x\right)^8$ . (6)
- 3.3 Bepaal en vereenvoudig die eerste 3 terme van  $(1 - 2x)^{-2}$ . (5)

3.1	$-2 - \sqrt{2}$ ook nulpunt ✓ $x + 2 = \pm\sqrt{2}$ ✓ $x^2 + 4x + 4 = 2$ ✓ Dus $x^2 + 4x + 2$ 'n faktor ✓ Nou langdeling of inspeksie: $(x^2 + 4x + 2)(x^2 + 1)$ ✓✓ $= (x + 2 + \sqrt{2})(x + 2 - \sqrt{2})(x^2 + 1)$ ✓	1: Ander nulpunt 3: Die faktor, enige metode 2: Die ander faktor 2: Faktorisering, elke hakie [8]
3.2	$n = 8$ ✓ en $r = 5$ ✓ $\binom{8}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^3 (-4x)^5$ ✓ $-7168x^5$ ✓	2: $n$ en $r$ 2: Vervang terme reg 1: -7168 1: $x^5$ . [6]
3.3	$n = -2$ ✓ $1 + (-2)(-2x) + \frac{(-2)(-3)}{2} (-2x)^2 + \dots$ ✓ $= 1 + 4x + 12x^2 + \dots$ ✓	1: $n$ 1: $-2x$ 1: regte 3e term 2: term 2 en 3 reg vereenvoudig [5]

**Vraag 4**

**[18 punte]**

4.1 Ontbind  $\frac{5x^2-4x+3}{(x-1)(x^2+1)}$  in partiële breuke. (8)

4.2 Gebruik **wiskundige induksie** en bewys dat die volgende bewering geld vir alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad (10)$$

<p>4.1</p>	$\frac{5x^2 - 4x + 3}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \checkmark$ $5x^2 - 4x + 3 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1) \checkmark$ $x = 1: 4 = 2A \checkmark, A = 2 \checkmark$ $x^2: 5 = A + B \checkmark, B = 3 \checkmark$ $K: 3 = A - C \checkmark, C = -1 \checkmark$ $\frac{2}{x - 1} + \frac{3x - 1}{x^2 + 1}$	<p>Punte soos getoon.</p> <p>Trek een af indien finale antwoord nie gegee.</p> <p style="text-align: right;"><b>[8]</b></p>
<p>4.2</p>	<p>Stel <math>n = 1</math>: LK = 2, Rk = 2, Dus waar vir <math>n = 1 \checkmark</math></p> <p>Aanvaar <math>\checkmark</math> waar vir <math>n = k</math>:</p> $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k + 1) = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2) \checkmark$ <p>Stel <math>n = k + 1</math>: RK = <math>\frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 3) \checkmark</math></p> $LK = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2) \checkmark + (k + 1)(k + 2) \checkmark$ $= \frac{1}{3}(k(k + 1)(k + 2) + 3(k + 1)(k + 2)) \checkmark$ $= \frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 3) \checkmark \checkmark = RK$ <p>Dus bewering waar vir <math>n = 1</math>. As dit waar is vir <math>n = k</math>, dan is dit ook waar vir <math>n = k + 1</math>. Dus waar <math>\forall n \in \mathbb{N} \checkmark</math></p>	<p>1: n=1</p> <p>1: Aanvaar</p> <p>1: n=k</p> <p>1: RK n=k+1</p> <p>2: LK n=k+1</p> <p><b>1: maak reg</b></p> <p><b>2: faktoriseer</b></p> <p>1: storie</p> <p>Pas geel punte (bg. 3 punte)aan indien leerlinge hakies uitmaal. Dit sal wees:</p> $\frac{1}{3}(k^3 + 6k^2 + 11k + 6)$ <p style="text-align: right;"><b>[10]</b></p>

**Vraag 5**

**[15 punte]**

Gegee:  $\mathbf{u} = 2i - j + 3k$ ,  $\mathbf{v} = -2i + 5k$  en  $\mathbf{w} = 5i - 2j + k$

- 5.1 Bepaal die eenheidsvektor van vektor  $\mathbf{w}$ . (3)
- 5.2 Bepaal die grootte van die hoek tussen vektore  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{v}$ . (5)
- 5.3 Bepaal die oppervlakte van die parallelogram wat gevorm word deur vektore  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{w}$ . (7)

5.1	$ \mathbf{w}  = \sqrt{25 + 4 + 1} \checkmark = \sqrt{30} \checkmark$ $\frac{5i}{\sqrt{30}} - \frac{2j}{\sqrt{30}} + \frac{k}{\sqrt{30}} \checkmark$ <p style="text-align: center;"><b>OF</b></p> $\left( \frac{5}{\sqrt{30}}; -\frac{2}{\sqrt{30}}; \frac{1}{\sqrt{30}} \right)$	2: Formule en grootte 1: Eenheidsvektor <p style="text-align: right;"><b>[3]</b></p>
5.2	$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{ \mathbf{u}  \mathbf{v} } = \cos \theta \checkmark$ $\cos \theta = \frac{-4 + 15 \checkmark}{\sqrt{4 + 1 + 9} \sqrt{4 + 25} \checkmark}$ $\theta = 0,99 \checkmark$	1: Verwerk formule 1: puntproduk 2: elkeen se grootte 1: antwoord <p style="text-align: right;"><b>[5]</b></p>
5.3	$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \checkmark$ $= i(-1 + 6) \checkmark - j(2 - 15) \checkmark + k(-4 + 5) \checkmark$ $= 5i + 13j + k \checkmark$ $\text{Oppervl} = \sqrt{25 + 169 + 1} \checkmark = \sqrt{195} \checkmark (= 13,96)$	1: determinant 3: Bereken determinant 1: kruisproduk 1: bereken grootte 1: antwoord <p style="text-align: right;"><b>[7]</b></p>

**Vraag 6**

**[22 punte]**

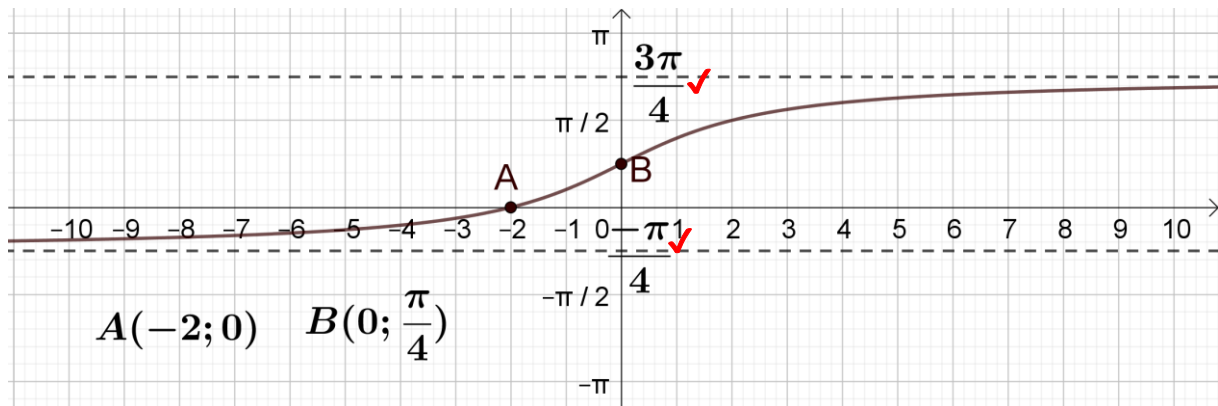
6.1 Bepaal die inverse funksie van  $y = 2\cos(2x) - 1$ . Skryf dit in die vorm  $y = \dots$  (4)

6.2 Maak 'n netjiese sketsgrafiek van  $f(x) = bgtan(2x) - \frac{\pi}{4}$ .

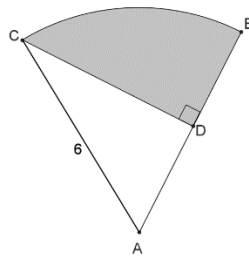
Toon duidelik alle afsnitte met die asse asook asimptote op jou grafiek aan. Indien van toepassing, moet eenhede in terme van  $\pi$  gegee word.

Gebruik **DIAGRAMBLAD 2** vir die skets. (6)

6.1	$x = 2 \cos(2y) - 1 \checkmark$ $\frac{x + 1}{2} = \cos 2y \checkmark$ $2y = b\text{g}\cos\left(\frac{x + 1}{2}\right) \checkmark$ $y = \frac{1}{2} b\text{g}\cos\left(\frac{x + 1}{2}\right) \checkmark$	1: Ruil $x$ en $y$ 1: Kry cos alleen  1: bgcos 1: Antwoord  <b>[4]</b>
6.2	$x: b\text{g}\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \checkmark$ $\frac{x}{2} = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \checkmark = -1; x = -2 \checkmark$ $y: y = b\text{g}\tan(0) + \frac{\pi}{4} = +\frac{\pi}{4} \checkmark$	2: Bereken x-afsnit 1: x-afsnit op skets 1: y-afsnit op skets 2: asimptote  Berekeninge hoef nie getoon te word nie, solank dit net reg op skets is.  <b>[6]</b>



6.3 Die skets toon **sektor** ABC met radius 6 cm en oppervlakte  $6\pi$  cm<sup>2</sup>. D is 'n punt op AB sodat  $CD \perp AB$ .



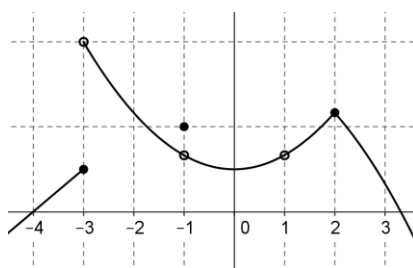
- (a) Bepaal die grootte van  $\widehat{CAB}$ . (3)
- (b) Bepaal die booglengte BC. Gebruik  $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$  radiale. (2)
- (c) Bereken die lengte van AD. (3)
- (d) Bereken vervolgens die oppervlakte van die geskakeerde gedeelte, BCD. (4)

6.3 (a)	$\frac{1}{2}r^2\theta = A, \checkmark$ $\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \theta = 6\pi \checkmark$ $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3} \checkmark$	1: Formule  1: Vervang reg 1: Antwoord  <b>[3]</b>
(b)	$BC = r\theta \checkmark = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi \checkmark$	2: Formule en antwoord  <b>[2]</b>
(c)	$\frac{AD}{6} = \cos \frac{\pi}{3} \checkmark$ $AD = 6 \times \frac{1}{2} \checkmark$ $AD = 3 \checkmark$	1: Trig 1: $\frac{1}{2}$ 1Antwoord  <b>[3]</b>
(d)	$\text{Oppervl } \triangle CAD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \checkmark = 7,79 \checkmark$ $\text{Oppervl BCD} = 6\pi - 7,79 \text{ of } 11,06 \checkmark \checkmark$	2: Oppervl CAD 2: Oppervl BCD  <b>[4]</b>

Vraag 7

[20 punte]

7.1 Die skets toon die grafiek van  $y = f(x)$ .



- (a) Die funksie is nie oral kontinu vir  $x \in [-4; 3]$  nie. Gee die punte van diskontinuiteit met die tipe. Motiveer telkens deur van die **definisie** van kontinuïteit gebruik te maak. (6)
- (b) Motiveer waarom die funksie nie differensieerbaar in die volgende punte is nie:
- (i)  $x = 1$  (1)
  - (ii)  $x = 2$  (1)

7.2 Differensieer soos gevra. Dit is nie nodig om antwoorde te vereenvoudig nie.

- (a)  $D_x[\sin x^2 + 2x]$ . (4)
- (b)  $\frac{d}{dx} \left[ \sqrt{x} \times \tan\left(\frac{2}{x}\right) \right]$ . (4)
- (c)  $f'(x)$  as  $f(x) = [\text{bgtan}(x)^2]^4$ . (4)

7.1 (a)	$x = -3$ , sprong, $\checkmark \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ bestaan nie $\checkmark$ $x = -1$ ; verwyderbaar $\checkmark$ ; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$ $\checkmark$ $x = 1$ ; verwyderbaar $\checkmark$ ; $f(1)$ bestaan nie $\checkmark$	Punte soos getoon. Redes moet wiskundig gegee word. [6]
(b)	i) Nie kontinu nie $\checkmark$ ii) Gradiënt links en regs verskil $\checkmark$	2: Punte soos getoon [2]
7.2 (a)	$\cos x^2$ $\checkmark$ . $2x$ $\checkmark$ + $2$ $\checkmark$	1: $\cos x^2$ 1: $2x$ 1: $2$ [3]
(b)	$\frac{d}{dx} \left[ x^{\frac{1}{2}} \times \tan(2x^{-1}) \right]$ $\checkmark$ $= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ $\checkmark$ $\times \tan(2x^{-1}) + \checkmark x^{\frac{1}{2}} \times \sec^2 \checkmark 2x^{-1} \cdot (-2x^{-2})$ $\checkmark$	1: Skryf reg 1: $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ 1: produkreël 1: $\sec^2$ 1: $-2x^{-2}$ [5]
(c)	$f'(x) = 4$ $\checkmark$ $[\text{bgtan}(x^2)]^3$ $\checkmark$ $\cdot \frac{1}{1 + (x^2)^2}$ $\checkmark$ $\cdot 2x$ $\checkmark$	Punte soos getoon [4]

**Vraag 8**

**[18 punte]**

8.1 Bepaal die volgende integrale:

(a)  $\int \operatorname{cosec}^2(5 - 4x) dx$  . (3)

(b)  $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}}\right) dx$ . (4)

8.2 (a) Toon aan dat  $\frac{d}{dx}(2x - \sin 2x) = 4 \sin^2 x$ . (4)

(b) Bepaal vervolgens  $\int \sin^2 x dx$ . (3)

8.3 Gebruik Newton se metode om 'n nulpunt van  $\tan x - (3x + 1) = 0$  te bepaal. Gee die antwoorde korrek tot vyf desimale syfers. Gebruik  $-0,5$  as eerste benadering. Toon duidelik hoe jy Newton se metode gebruik. (4)

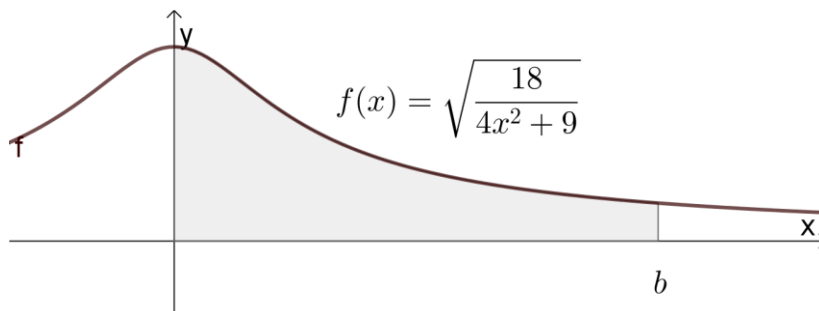
8.1 (a)	$-\frac{\cot(5 - 4x)}{-4} + k$	1: -cot 1: -4 1: eenmalig vir al die k's	<b>[3]</b>
(b)	$4x - 4x^2 = 1 - (4x^2 - 4x + 1)$ $= 1 - (2x - 1)^2$ $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\right) dx = \frac{\operatorname{arcsin}(2x-1)}{2} + k$	4: Punte soos getoon	<b>[4]</b>
8.2 (a)	$\frac{d}{dx}(2x - \sin 2x) = 2 - 2 \cos 2x$ $= 2 - 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x$ $= 4 \sin^2 x$	3: differensiasie 1: identiteit	<b>[4]</b>
(b)	$\int \sin^2 x dx =$ $= \frac{2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + k$	2: elke term 1: diff omgekeerde van integrasie	<b>[3]</b>
8.3	$f'(x) = \sec^2 x - 3$ $x_{n+1} = x_n - \frac{\tan x_n - (3x_n + 1)}{\sec^2 x_n - 3}$ $x \approx -0,52754$	1: differensieer 1: Newton 1: antwoord 1: reg afgerond	<b>[4]</b>

**Vraag 9**

**[18 punte]**

9.1 Die oppervlakte tussen die grafieke  $f(x) = \sec^2 x$  en  $g(x) = \sin 2x$  en tussen die lyne  $x = \frac{\pi}{4}$  en  $x = \frac{\pi}{3}$  is gelyk aan  $\sqrt{p} + a$ . Bereken die waardes van  $a$  en  $p$  wat rasionale getalle is. Toon al die stappe van integrasie wat jy gebruik. (7)

9.2 Die grafiek van  $f(x) = \sqrt{\frac{18}{4x^2+9}}$  word getoon. Die gebied tussen die lyne  $x = 0$  en  $x = b$  is geskakeer.



Hierdie gebied roteer om die  $x$ -as. Die volume van die omwentelingsliggaam wat so ontstaan is gelyk aan  $\frac{3\pi^2}{4}$ . Bereken die waarde van  $b$ . (11)

9.1	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x - \sin 2x) dx \checkmark$ $= \tan x \checkmark + \frac{\cos 2x}{2} \checkmark \Big _{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ $= \tan \frac{\pi}{3} + \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{2} - \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{2} \checkmark$ $= \sqrt{3} - -\frac{1}{4} \checkmark - 1 - 0$ $= \sqrt{3} - 1,25; p = 3 \checkmark \text{ en } a = -1,25 \checkmark$	<p>1: Integraal reg geskryf</p> <p>2: Integrale</p> <p>1: Vervang</p> <p>1: Waardes</p> <p>2: antwoorde</p> <p style="text-align: right;"><b>[7]</b></p>
9.2	$V = \pi \int_0^b \frac{18}{4x^2+9} dx \checkmark = \frac{3\pi^2}{4} \checkmark$ $\frac{1}{9} \checkmark \int_0^b \frac{18}{\left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 1} dx = \frac{3\pi}{4}$ $2b \tan \left(\frac{2}{3}x\right) \cdot \frac{3}{2} \Big _0^b = \frac{3\pi}{4}$ $b \tan \left(\frac{2}{3}b\right) \checkmark - 0 = \frac{\pi}{4} \checkmark$ $\frac{2}{3}x = 1 \checkmark; x = \frac{3}{2} \checkmark$	<p>2: Integraal reg geskryf</p> <p>3: Maak integraal reg</p> <p>2: Integreer</p> <p>1: Vervang</p> <p>1: vereenvoudig</p> <p>1: <math>\tan \frac{\pi}{4} = 1</math></p> <p>1: Antwoord</p> <p style="text-align: right;"><b>[11]</b></p>