

# $\alpha$ -WISKUNDE

## Rekordeksamen

September 2023

Graad 12

Tyd: 3 uur

Totaal: 200 punte

### INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies aandagtig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1. Beantwoord AL nege vrae op hierdie vraestel.
2. Skryf jou naam op die antwoordblad van die vraestel.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders vermeld by 'n spesifieke vraag.
4. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot **twee desimale syfers** afgerond word.
5. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
6. **Alle hoeke word in radiale gegee.** Antwoorde moet in radiale gegee word waar van toepassing.
7. Hierdie vraestel bestaan uit ses bladsye en 'n antwoordblad van drie bladsye. Die formuleblad bevat drie bladsye.
8. Vraag 1 bestaan uit 15 meervoudigekeusevrae. Beantwoord dit op die antwoordblad.
9. Toon alle noodsaaklike berekeninge duidelik aan by elke vraag. Die korrekte antwoord op sigself sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Skryf netjies en leesbaar.



1.4 Die derde term in die binomiaaluitbreiding van  $\sqrt[4]{1-2x}$  is

(A)  $-\frac{3x^2}{32}$

(B)  $-\frac{1}{16}$

(C)  $-\frac{3x^2}{8}$

(D)  $\frac{7x^3}{16}$

1.5 Bepaal die rigting van vektor (2; 1) met betrekking tot die  $x$ -as:

(A) 0,46 rad

(B) 0,52 rad

(C) 1,05 rad

(D) 1,11 rad

1.6 Die asimptote van  $y = \text{bgtan}(2x - 1) + \frac{\pi}{4}$  is

(A)  $y = \frac{\pi}{2}$  en  $y = -\frac{\pi}{2}$

(B)  $y = \frac{3\pi}{4}$  en  $y = -\frac{\pi}{4}$

(C)  $y = \frac{\pi}{4}$  en  $y = -\frac{3\pi}{4}$

(D)  $y = \pi$  en  $y = -\pi$

1.7 Gegee:  $-2ax + y = -7$   
 $5x - y = 8$

Vir watter waarde van  $a$  sal die stelsel vergelykings geen oplossing hê nie?

(A)  $a = \frac{5}{2}$

(B)  $a = \frac{2}{5}$

(C)  $a = \frac{-5}{2}$

(D)  $a = \frac{-2}{5}$

1.8 Vereenvoudig:  $\frac{2(\cos(\frac{3\pi}{5}) + i\sin(\frac{3\pi}{5}))}{6(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))}$

(A)  $3\text{cis}\left(\frac{15\pi}{4}\right)$

(B)  $\frac{1}{3}\text{cis}\left(\frac{4\pi}{15}\right)$

(C)  $\frac{1}{3}\text{cis}\left(\frac{15\pi}{4}\right)$

(D)  $3\text{cis}\left(\frac{4\pi}{15}\right)$

1.9 Gegee:  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  en  $g(x) = x + 1$ . Wat is die waarde van  $(f \circ g)(-1)$ ?

(A) 1

(B) 0

(C) -1

(D)  $i$

1.10 Die volume van die omwentelingsliggaam wat gevorm word indien  $y = \cos(3x)$  om die  $x$ -as roteer, tussen  $x = a$  en  $x = b$ , kan as volg bereken word:

(A)  $\frac{\pi}{2} \int_a^b (1 + \cos(2x)) dx$

(B)  $\pi \int_a^b (1 + \cos(2x)) dx$

(C)  $\frac{\pi}{2} \int_a^b (1 + \cos(6x)) dx$

(D)  $\pi \int_a^b (1 + \cos(6x)) dx$

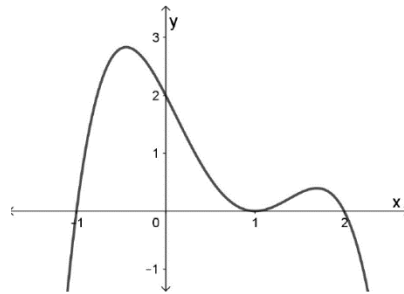
1.11 Indien  $p(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x + 6$ , watter een van die volgende sal 'n faktor wees van  $p$ , indien  $x = 1 - i$  'n nulpunt van  $p$  is?

- (A)  $x^2 - 2x + 2$  (B)  $x^2 + 2x + 2$   
 (C)  $x^2 + 2x - 2$  (D)  $x^2 - 2x - 2$

1.12 Indien  $y = f(x)$  differensieerbaar is by  $x = 1$ , watter een van die volgende is korrek?

- (A)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  (B)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$   
 (C)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$  (D) Al die bogenoemde opsies.

1.13 Gegee: Die grafiese voorstelling van  $f$ . Die funksie het draaipunte by  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = 1$  en  $x = 1,7$



Indien Newton se metode gebruik word om 'n  $x$ -afsnit van  $f$  te bepaal en  $x_0 = -0,4$  word gekies as die beginwaarde, na watter  $x$ -afsnit sal Newton se metode neig?

- (A)  $x = 2$  (B)  $x = -1$   
 (C)  $x = 1$  (D) geen  $x$ -afsnitte nie

1.14 Die funksie  $h(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 + x - 2}$  het die volgende asimptote:

- (A)  $y = 3$ ;  $x = -2$ ;  $x = 1$  (B)  $y = \frac{1}{3}$ ;  $x = -2$ ;  $x = 1$   
 (C)  $y = 3$ ;  $x = -2$  (D)  $y = \frac{1}{3}$ ;  $x = -2$

1.15  $\int \frac{2}{\ln 4(7x+3)} dx =$

- (A)  $\frac{\ln(7x+3)^2}{7} + k$  (B)  $\log_4(7x+3)^{\frac{2}{7}} + k$   
 (C)  $\log_4(7x+3)^2 + k$  (D)  $2\ln 4 \cdot \ln(7x+3) + k$

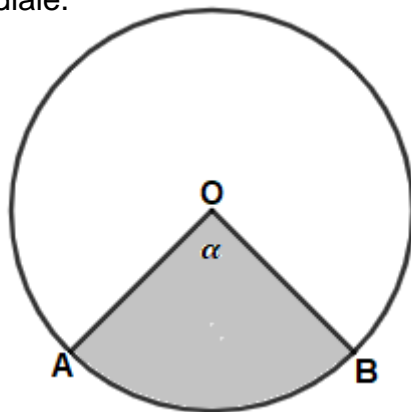
**VRAAG 2 [20 PUNTE]**

- 2.1 Die intensiteit van klank, gemeet in watt/m<sup>2</sup>, word gegee deur die formule  $I = 10^{-12}(e^{0,1x})$ , waar  $x$  die volume van die klank is, gemeet in decibels.
- (a) Indien die volume van 'n klank by 'n konsert 110 decibels is, bereken die intensiteit van die klank. Gee die antwoord in wetenskaplike notasie. (2)
- (b) Skade in die gehoor vind plaas indien die intensiteit van 'n klank groter is as  $8,1 \times 10^{-9}$  watt/m<sup>2</sup>. Wat is die maksimum volume wat 'n klank kan wees voordat gehoorskade plaasvind? (3)
- 2.2 Gegee  $p = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$  en  $k = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$
- (a) Skakel  $p$  en  $k$  om in poolvorm. (3)
- (b) Bepaal  $z = p \cdot k$ . (2)
- (c) Bepaal  $\sqrt{z}$ . (3)
- 2.3 Los op vir  $x$  indien  $x \in \mathbb{R}$ :  $|3x - 1| = \frac{2}{x}$  (7)

**VRAAG 3 [23 PUNTE]**

- 3.1 In die binomiaaluitbreiding van  $(px + \frac{1}{x^2})^6$  sal die konstante term gelyk wees aan 240. Bepaal die waarde(s) van  $p$ . (8)
- 3.2 Gebruik wiskundige induksie en bewys dat, vir alle natuurlike getalle  $n$ , die volgende bewering waar is:
- $$\sum_{r=1}^n 3^{r-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$$
- (9)

- 3.3 Die onderstaande skets toon 'n sirkel met middelpunt  $O$  en radiusse  $AO$  en  $BO$ .  $\widehat{AOB} = \alpha$  radiale.



- (a) Toon aan dat  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  radiale, indien die oppervlakte van die sirkel agt (8) keer groter is as die oppervlakte van sektor  $AOB$ . (3)
- (b) Bepaal die omtrek van die ingekleurde sektor  $AOB$  indien  $AO = 3\text{cm}$ . Gee jou antwoord i.t.v.  $\pi$ . (3)

**VRAAG 4 [24 PUNTE]**

- 4.1 Gegee  $f(x) = 2b\sin\left(x + \frac{3}{2}\right)$ .
- (a) Toon dat  $f$  géén  $y$ -afsnit het nie. (2)
- (b) Die definisieversameling van  $f$  is  $x \in \left[-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right]$ . Bepaal die waardeversameling van  $f$ . (5)
- 4.2 Vektor  $u$  het 'n grootte van 2cm en is in 'n rigting  $\frac{\pi}{6}$  radiale noord van oos. Bereken die horisontale en vertikale komponente van  $u$ . (2)
- 4.3 Bepaal die grootte van vektor  $a$  indien  $a \cdot b = 10$  en vektor  $b$  'n grootte van 4cm het. Die hoek tussen  $a$  en  $b$  is  $\frac{\pi}{3}$  radiale. (3)
- 4.4 Die punte  $A(1; -1; 1)$ ,  $B(2; 1; 3)$  en  $D(-2; 1; 1)$  is drie punte, op dieselfde vlak, in 'n drie dimensionele ruimte.
- (a) Bepaal die vektore  $AB$  en  $AD$ . (2)
- (b) Bepaal die eenheidsvektor van  $AB$ . (2)
- (c) Bepaal die hoek wat  $AB$  met die  $y$ -as maak. (3)
- (d) Is  $AB$  en  $AD$  ewewydig? Gebruik die kruisproduk en motiveer jou antwoord. (5)

**VRAAG 5 [25 PUNTE]**

- 5.1 Gegee:  $f(x) = \begin{cases} 2k + 1 & \text{as } x < 3 \\ t & \text{as } x = 3 \\ \frac{x}{k} & \text{as } x > 3 \end{cases}$
- (a) Bepaal die waarde(s) van  $k$  indien  $f$  kontinu is by  $x = 3$ . (5)
- (b) Aanvaar dat  $k = -\frac{3}{2}$  en bepaal of  $f$  differensieerbaar is by  $x = 3$ . (3)
- 5.2 Skets 'n moontlike voorstelling van 'n funksie  $f'$  (**die eerste afgeleide van  $f$** ) indien die volgende waar is:
- Die funksie  $f$  het stasionêre punte by  $x = -1$  en  $x = 2$ .
  - Die funksie  $f$  het buigpunte by  $x = 0$  en  $x = 2$ .
  - $f''(x) > 0$  as  $x < 0$  en  $x > 2$
  - $f$  buig konkaf af indien  $0 < x < 2$  (7)
- 5.3 Gegee:  $y = \ln\left(\frac{1}{xy}\right)$
- (a) Gebruik implisiete differensiasie en bepaal  $\frac{dy}{dx}$ . (Wenk: skryf eers die funksie as die verskil tussen twee logaritmiëse funksies.) (7)
- (b) Vervolgens, of andersins, bepaal die gradiënt van die raaklyn aan die funksie by die punt  $\left(\frac{1}{e}; 1\right)$ . (3)

**VRAAG 6 [24 PUNTE]**

- 6.1 Toon algebraïes dat  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x \neq 0$ , 'n minimum draaipunt het by (1; 2). (11)
- 6.2 (a) Bepaal die  $x$ -koördinaat van die buigpunt(e) van die funksie  $h(x) = e^{\text{bgtan}x}$ . (10)
- (b) Beskryf **in woorde** hóé getoets kan word of hierdie punt(e) wél buigpunte is. (Dit is nie nodig om die toets uit te voer nie.) (3)

**VRAAG 7 [22 PUNTE]**

- 7.1 Differensieer die volgende funksies, soos gevra:
- (a) Bepaal  $f'(x)$  indien  $f(x) = 2^{\cos^2(3x)}$  (5)
- (b)  $D_x[\log_5(2x - 1) - \text{bgsin}(\sqrt[3]{e^{-x}})]$  (6)
- 7.2 Gebruik 'n Riemannsom en bepaal  $\int_1^3 -2x^2 dx$  (11)

**VRAAG 8 [22 PUNTE]**

- 8.1 Vereenvoudig:
- (a)  $\int \left(5^{3x} - \frac{x^3}{5}\right) dx$  (5)
- (b)  $\int \frac{dx}{x(\ln x)^3}$  (Wenk: jy mag substitusie gebruik.) (4)
- (c)  $\int \left(\cot^2(x) + \sec^2\left(\frac{x}{3}\right)\right) dx$  (5)
- 8.2 Indien  $g(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2(4+x^2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{1}{4+x^2}$ , bepaal  $\int g(x) dx$  (8)

**VRAAG 9 [10 PUNTE]**

- Gebruik faktorintegrasie en toon aan dat die oppervlakte onder die kromme  $y = (x + 1)e^x$ , tussen  $x = 0$  en  $x = p$ , geskryf kan word as  $pe^p$ . (10)

**Totaal: 200****EINDE VAN VRAESTEL**