Alpha Wiskunde

Graad 12 Eksamenvraestel

21 Oktober 2016

Totaal: 200 punte **Tyd: 3 ure**

INSTRUKSIES

1. Beantwoord alle vrae op die vraestel en handig dit so in. Onthou om jou naam en ID nommer voor op die vraestel te skryf.
2. Skryf netjies en leesbaar.
3. Nie-programmeerbare sakrekenaars mag gebruik word.
4. Die diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
5. Alle hoeke word in radiale gegee. Antwoorde moet in radiale gegee word indien nodig.
6. Tensy anders gespesifiseer, moet alle antwoorde, waar van toepassing, korrek tot twee desimale syfers afgerond word.
7. Hierdie vraestel bestaan uit 10 vrae en 3 formuleblaaie.
8. Vraag 1 bestaan uit 10 meervoudige keuse vrae. Beantwoord dit op die antwoordblad. Hierdie Antwoordblad is aan die voorkant van die vraestel. Moet dit asseblief NIE losmaak nie.
9. By al die ander vrae moet alle noodsaaklike berekeninge duidelik getoon word. Die korrekte antwoord alleen sal nie noodwendig tot volpunte lei nie.
10. Daar is ekstra spasie aan die einde van die vraestel. Dui duidelik aan as jy dit gebruik by 'n vraag..

VRAAG 1 [20 punte]

Beantwoord hierdie vraag op die antwoordblad wat heel voor is deur telkens X op A, B, C of D te maak. Moet asb. nie hierdie bladsy losmaak van die vraestel nie. Hierdie vrae tel 2 punte elk.

1.1 As $f(x) = \begin{cases} \ln x & as\ 0 < x \leq 1 \\ x^2 & as\ x \geq 1 \end{cases}$, dan

(A) is f kontinu in die punt $x = 1$.

(B) is f differensieerbaar in die punt $x = 1$.

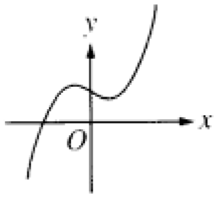
(C) bestaan daar 'n verwyderbare diskontinuïteit by $x = 1$.

(D) bestaan daar 'n sprong diskontinuïteit by $x = 1$.

1.2 Die binomiaal uitbreiding van $(a+b)^{20}$ sal ...... terme bevat.

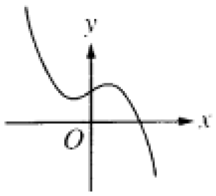
(A) 'n oneindige aantal (B) 19 (C) 20 (D) 21

1.3 Die grafiek van $y = h(x)$ word getoon:

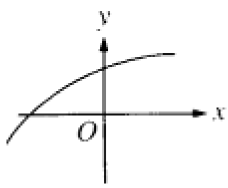


Watter van die volgende kan die grafiek van $y = h'(x)$ wees?

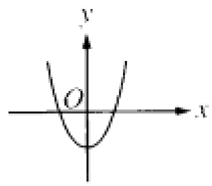
(A)



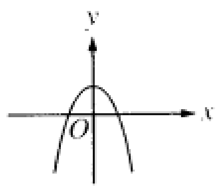
(B)



(C)



(D)



1.4 Gegee $f(x) = \tan x$. As $0 \leq k \leq \frac{\pi}{2}$ en $f'(k) = 2$, dan is $k =$

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

1.5 As $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 5$, watter stelling moet waar wees:

(A) $f(2)$ is ongedefinieerd (B) $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ (C) $f(2) = 5$ (D) $f'(2) = 5$

1.6 Die aantal reële oplossings wat $|x+1| = -x^2 - 1$ sal hê, is

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

1.7 Gegee: $y = f(x)$ is differensieerbaar vir alle $x \in \mathbb{R}$. Verder is gegee dat $f'(2) = 0$ en $f''(2) > 0$. Dan sal f by $x = 2$:

(A) 'n punt van infleksie hê. (B) 'n lokale maksimum hê.

(C) 'n lokale minimum hê. (D) 'n stasionêre punt van infleksie hê.

1.8 Die oppervlakte ingesluit deur die grafiek $y = cosx$ en die x-as tussen die punte $x = 0$ en $x = \pi$ is gelyk aan

(A) 3,14 (B) 2 (C) 1 (D) 0

1.9 Gebruik die logaritme wette en brei $\boldsymbol{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y^2}}\right)$ uit.

(A) $2lny$ (B) $-2lny$

(C) $ln1 - (lny)^2$ (D) $-(lny)^2$

1.10 $(f \circ g)(x) = x^2 + x$. As $g(2) = 4$ en $g'(2) = 5$, bepaal $f'(4)$.

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 6

Beantwoord die volgende vrae op die vraestel in die spasie voorsien.

VRAAG 2 [19 punte]

2.1 Newton se wet vir die afkoeling van 'n vloeistof, soos sop, word gegee met die vergelyking

$$\boldsymbol{T(t) = 20 + 60e^{-0{,}054t}}$$

waar $\boldsymbol{T}$ die temperatuur, gemeet in ℃, van die sop na **t** minute gee.

(a) Bepaal die aanvanklike temperatuur van die sop. (2)

(b) Bepaal die temperatuur van die sop na 10 minute. Gee die antwoord as 'n heelgetal. (2)

(c) Bereken na hoeveel minute die sop 'n temperatuur van 40℃ sal bereik. (3)

(d) Die asimptoot van die grafiek van $y = T(t)$ is $T = 20$. Wat is die praktiese betekenis van hierdie antwoord? (1)

2.2 Gebruik wiskundige induksie en bewys dat, vir alle $n \in \mathbb{N}$, sal

$$\frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{4\times 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$ (11)

VRAAG 3 [21 punte]

3.1 Gebruik die binomiaalstelling en bepaal die koëffisiënt van x^2 in $(1+x^2)\left(\frac{x}{2}-\frac{4}{x}\right)^6$ (8)

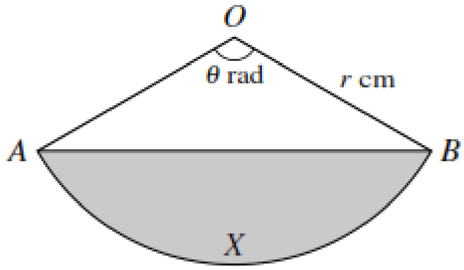
3.2 Die volgende uitbreiding is met behulp van die binomiaalstelling gedoen:
$(1-i)^4 = 1 + 4(-i) + 6(-i)^2 + 4(-i)^3 + (-i)^4$

a) Vereenvoudig hierdie uitbreiding na die vorm $x + yi$ (2)

b) Gebruik nou **de Moivre se stelling** en vereenvoudig $(1-i)^4$. Werk in poolvorm en gebruik wortelvorm en π indien nodig. Die antwoord moet in reghoekige vorm gegee word. Hoe vergelyk hierdie antwoord met die van vraag 3.2 (a)? (6)

3.3 Gee die eerste **drie** terme in die magsuitbreiding van $\frac{1}{(1-x)^2}$ en gebruik dan hierdie drie terme om 'n benaderde waarde van $\frac{1}{0{,}8^2}$ te bereken. (5)

VRAAG 4 **[20 punte]**

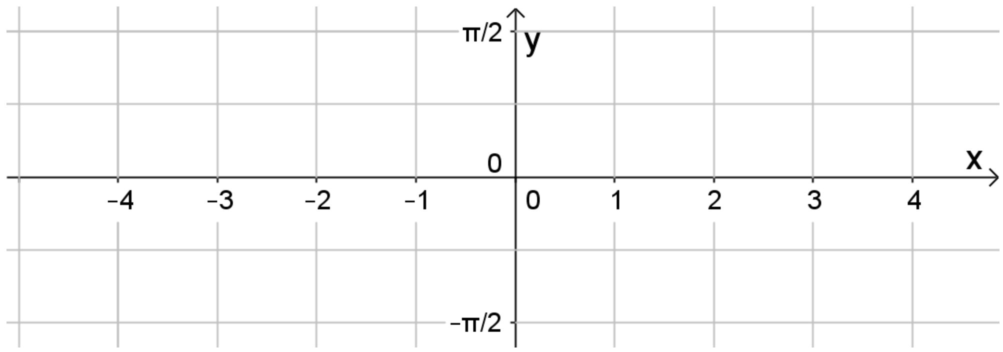


4.1 Die skets toon 'n sektor van 'n sirkel met middelpunt O en radius r. Hoek AOB = θ radiale.
Segment AXB is ingekleur.

a) Indien die oppervlaktes van die segment AXB en die driehoek OAB gelyk is, bepaal die waarde van p indien $\boldsymbol{\theta = p sin\theta}$**.** (Wenk: Gebruik θ as die hoek in jou berekening) (5)

b) Indien $p = 2$, gebruik **Newton se metode** om die waarde van θ, korrek tot **vier** desimale syfers. te bereken. Gebruik $\theta_0 = 2$ as aanvangswaarde. Toon duidelik die formule wat jy gebruik met Newton se metode. (5)

4.2 a) Gebruik die gegewe assestelsel en maak sketsgrafieke van $f(x) = bgtanx$ en $g(x) = -bgtan(x-2)$. Toon die asimptote en afsnitte met die asse duidelik aan. (5)



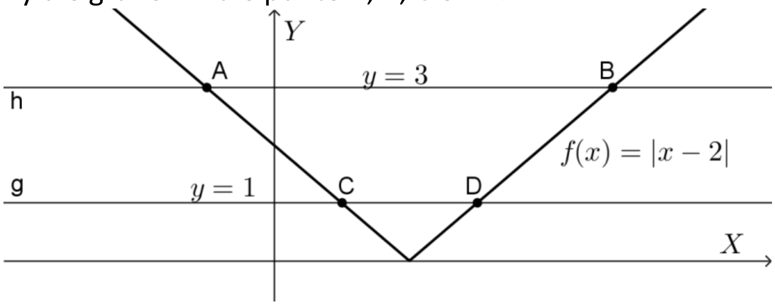
b) Gebruik jou grafiek en gee die waardes van $\boldsymbol{x}$ waarvoor $f(x) \geq g(x)$. (2)

c) Gee die ooreenstemmende waardes van $\boldsymbol{y}$ waarvoor die ongelykheid in vraag 4.2 (b) geld. (3)

VRAAG 5 [24 punte]

5.1 Los op vir x met $x \in \mathbb{C}$ en $\boldsymbol{x^4 + 5x^3 + 27x^2 + 5x - 174 = 0}$ as een van die oplossings $\boldsymbol{x = -2 - 5i}$ is. (8)

5.2 Die onderstaande skets toon die grafiek van $f(x) = |x-2|$ asook die lyne $y = 1$ en $y = 3$. Hierdie lyne sny die grafiek in die punte A, B, C en D.



(a) Bepaal slegs die x-waardes van A, B, C en D. (6)

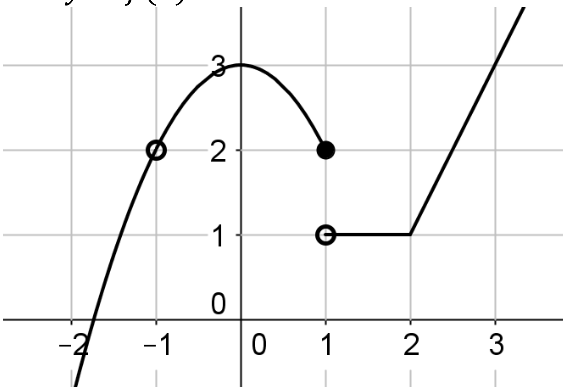
(b) Gebruik vervolgens die grafiek en jou antwoorde van vraag 5.2 (a) en skryf die oplossing neer van $1 \leq |x-2| \leq 3$ (4)

5.3 Die matriks gevorm deur 'n stelsel vergelykings is $M = \begin{pmatrix} a & -2 & -a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Hierdie stelsel het geen oplossing nie. Bepaal die waarde van a. (6)

VRAAG 6 **[16 punte]**

6.1 Die skets toon die funksie $y = f(x)$. Gebruik die skets en beantwoord die vrae wat volg.



(a) Gee die x-waardes waar f nie kontinu is nie. Motiveer telkens algebraïes waarom die funksie nie kontinu in hierdie punte is nie en noem die tipe diskontinuïteit. (6)

(b) Gee 'n rede waarom f nie differensieerbaar in die punte gegee in vraag 7.1 (a) is nie. (1)

(c) Noem een ander punt waar f nie differensieerbaar is nie en motiveer jou antwoord. (2)

(d) Die funksie het 'n lokale maksimum draaipunt by $x = 0$. Gee moontlike waardes van $f'(0)$ en $f''(0)$. (2)

6.2 Bepaal $f'(x)$ vanaf grondbeginsels indien $f(x) = \frac{1}{1-x}$ (5)

VRAAG 7 [23 punte]

7.1 Differensieer die volgende funksies. Dit is nie nodig om jou antwoorde te vereenvoudig nie.

(a) $f(x) = bgsin(\sqrt{x})$ (3)

(b) $f(x) = tan4x \times (e^x + x^2)^{10}$ (5)

7.2 Gebruik implisiete differensiasie en bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $\boldsymbol{ln\left(\frac{1}{y^2}\right) = \frac{x}{y}}$ vir $y \neq 0$. (7)

7.3 ’n Grafiek se vergelyking is $y = e^{x-2} - 2x + 6$. Die x- waarde van die stasionêre punt is van die vorm $x = ln(p) + p$.

(a) Bepaal die waarde van p. (4)

(b) Bepaal die aard van die stasionêre punt. (4)

VRAAG 8 **[20 punte]**

8.1 Bepaal die volgende integrale:

(a) $\int cosec^2(4x)\,dx$ (3)

(b) $\int_1^e x.\,lnx\,dx$ deur van faktor (stuksgewyse) integrasie gebruik te maak **en gee die antwoord in terme van e**. Toon duidelik hoe jy faktor integrasie gebruik het. (6)

(c) $\int \frac{2x^2+x+1}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$ deur van parsiële breuke gebruik te maak. (7)

8.2 'n Grafiek van $y = f(x)$ is so dat $\frac{dy}{dx} = 12e^{2x+4}$ en $f(-2) = 10$. Bepaal die vergelyking van f. (4)

VRAAG 9 [27 punte]

9.1 Bepaal die volgende integraal met 'n oneindige Riemannsom: $\int_{2}^{3}(3x^2-6)dx$ (12)

9.2 $f(x) = x.\sqrt{25 - x^2}$

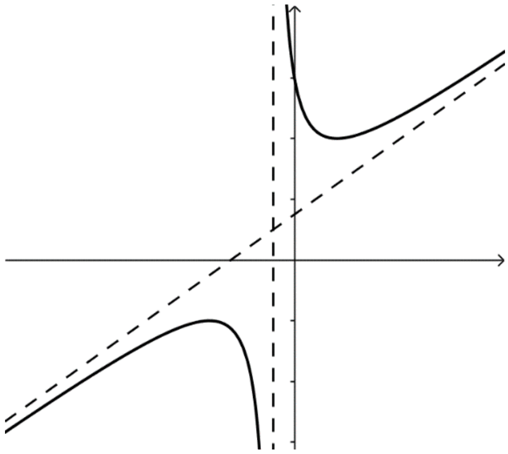
(a) Die oppervlakte begrens deur die grafiek $y = f(x)$, die lyne $x = a$ met $0 < a < 5$ en $x = 5$ en die x-as is gelyk aan $\frac{64}{3}$. Bepaal die waarde van a. Toon al jou bewerkings. Geen punte sal vir net die antwoord gegee word nie. (8)

(b) Bereken die volume van die omwentelingsliggaam wat gevorm word indien $y = f(x)$ om die x-as roteer met $-1 \leq x \leq 0$. Toon alle stappe, geen punte sal vir slegs die antwoord gegee word nie. (7)

VRAAG 10 [10 punte]

Die skets toon die grafiek van $f(x) = \frac{2x^2+4x+6}{2x+1}$ en die asimptote van f.

10.1 Bepaal die vergelykings van die asimptote van f (4)



10.2 Bepaal die waardeversameling van f (6)

Ekstra Spasie

TOTAAL: 200