Alpha Wiskunde

Graad 12 Memo

Antwoordblad: VRAAG 1

Vraag				
1	A	B	C	D
2	A	B	C	D
3	A	B	C	D
4	A	B	C	D
5	A	B	C	D
6	A	B	C	D
7	A	B	C	D
8	A	B	C	D
9	A	B	C	D
10	A	B	C	D

VRAAG 2 [20 punte]

2.1 'n Mikrobioloog bestudeer 'n sekere bakterie. Die aantal bakterieë in die monster kan bepaal word met die formule $N = 5{,}85(2^{kt})$ waar t die tyd in uur, k 'n konstante en N die aantal bakterieë in miljoen is.

(a) Bepaal hoeveel miljoen bakterieë daar aanvanklik was. (2)

$N = 5{,}85(2^{k\times 0})$	1	Vervang met 0
$N = 5{,}85$ miljoen	1	Antwoord

(b) Bereken die waarde van k, korrek tot 4 desimale syfers, indien daar na 20 uur 7,68 miljoen bakterieë is. (3)

7,68=5,85(2^{20k})	1	Vervang
$20k = \log_2 1{,}31$	1	Log
K = 0,0196	1	antw

(c) Gebruik $k = 0{,}02$ en bereken die tempo waarteen die bakterieë vermeerder na 20 uur. (4)

N' = 5,85$(2^{0{,}02t}).ln(2).(0{,}02)$	3	Diff
= 0,11	1	antw

2.2 Gegee $P(x) = x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 9x - 13$ met 'n wortel $2 - 3i$. Ontbind $P(x)$ in faktore met rasionale koëffisiënte. (5)

$x^2 - 4x + 14$ 'n faktor	2	1e faktor
$(x^2 - 4x + 13)(x^2 - x - 1)$	3	2e faktor

2.3 Die koëffisiënt van x^3 in die uitbreiding van $(2 + ax)^5$ is 10 keer dié van x^2 in die uitbreiding van $\left(1 + \frac{ax}{3}\right)^4$. Gebruik die binomiaalstelling en bereken die waarde van a, $a \neq 0$. (6)

$n = 5; r = 3$	1	Waarde r
$\binom{5}{3}(2^2)(ax)^3 = 40a^3x^3$	1	Antw
$n = 4; r = 2$	1	Waarde r
$\binom{4}{2}(1^2)\left(\frac{ax}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}a^2x^2$	1	Antw
$40a^3 = 10.\frac{2}{3}.a^2$	1	Vgl, x10
$a = \frac{1}{6}$	1	Ant

VRAAG 3 [21 punte]

3.1 Gegee die stelsel vergelykings:

$$2x + y + z = 0$$
$$2x + 3z = 4$$
$$-x + 2y + z = 3$$

(a) Skryf die stelsel in matriks vorm. (2)

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	2	Regte vorm $x; y; z$

(b) Los vervolgens op vir z. Gebruik Cramer se metode en toon duidelik met watter determinante jy gewerk het. (5)

A = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	1	Determinant
$A_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	1	Determinant
A =-13	1	Antw
A_z= =-26	1	Antw
$z = 2$	1	Waarde z

3.2 Gebruik de Moivre se stelling en rasionaliseer die noemer van $\frac{16}{(-1-i)^8}$.
Werk in poolvorm en gebruik wortelvorm en π indien nodig.
Gee die antwoord in reghoekige vorm, $a + bi$. (6)

$16(-1-i)^{-8}$	1	eksponent
= $16\left(\sqrt{2}cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^{-8}$	2	r en θ
= $16(\frac{1}{16}cis(-10\pi))$	2	$\frac{1}{16}$ en -10π
= 1	1	Antw

3.3 Gebruik wiskundige induksie en bewys dat vir alle $n \in \mathbb{Z}$ is: (8)

$$-1 + 4 - 9 + \cdots + (-1)^n n^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$$

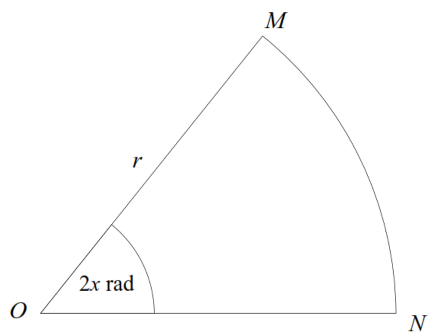
Stel $n = 1$: Lk = -1 en RK = -1	1	Lk en RK
Aanvaar waar vir $n = k$: $-1 + 4 - 9 + \cdots + (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^k k(k+1)}{2}$	1	Aanvaar
Stel $n = k + 1$: Rk = $\frac{(-1)^{k+1}(k+1)(k+2)}{2}$	1	Vervang k+1 in RK
LK = $\frac{(-1)^k k(k+1)}{2} + (-1)^{k+1}(k+1)^2$	2	Elke term
= = $\frac{-(-1)^{k+1}k(k+1)}{2} + \frac{2((-1)^{k+1}(k+1)^2}{2}$	2	$-(-1)^{k+1}$ en op 2
=$\frac{(-1)^{k+1}(k+1)(k+2)}{2}$		
Bewering is waar vir $n = 1$. As dit waar is vir $n = k$, is dit ook waar vir $n = k + 1$. Dus waar $\forall n \in \mathbb{N}$	1	Storie
OF RK = $\frac{-(-1)^k(k+1)(k+2)}{2}$	1	
LK = = $\frac{(-1)^k k(k+1)}{2} + \frac{-2(-1)^k(k+1)^2}{2}$	2	Minus en op 2
Probeer meer alternatiewe kry. Kyk ook na algemene foute, dan sal ons besluit hoeveel punte om te gee.		

VRAAG 4 [23 punte]

4.1 Los op vir x: $|x^2 - 4| = x + 8$ (6)

$x^2 \geq 0, \therefore x \leq\ 2$ of $x \geq 2$	1	Voorwaarde
$x^2 - 4 = x + 8$	1	Vgl
$(x-4)(x+3) = 0$	1	Faktoriseer
$x = 4$ of $x = -3$	1	Antw
$x^2 < 0\ \therefore -2 < x < 2$	1	Voorwaarde
$x^2 - 4 = -x - 8$, geen opl	1	Antw

4.2 Die skets toon 'n sektor van 'n sirkel OMN met middelpunt O. Die radius is r en $M\hat{O}N = 2x$.



a) Bepaal uitdrukkings, in terme van r en x, vir die omtrek, P en die oppervlakte, A, van die sektor. (2)

$P = 2r + 2rx$	1	P
$A = xr^2$	1	A

b) Toon vervolgens aan dat indien P = 20, sal $A = \frac{100x}{(1+x)^2}$. (4)

20 = $2rx + 2r$	1	Vervang 20
$2r(x+1) = 20$	1	Faktoriseer
$r = \frac{10}{x+1}$	1	r alleen
$A = \left(\frac{10}{1+x}\right)^2 x$	1	Vervang

c) Bepaal $\frac{dA}{dx}$ en bereken vervolgens die waarde van x waarvoor die oppervlakte van die sektor 'n maksimum sal wees.
(Dit is nie nodig om aan te toon dat dit 'n maksimum is nie). (6)

$\frac{100(1+x)^2 - 100x.2(1+x)}{(1+x)^4} = 0$	3	2 bo, 1 vir =0
$1 + 2x + x^2 - 2x - 2x^2 = 0$	1	Vereenvoudig
$x^2 - 1 = 0$	1	Vgl
$x = 1$	1	Antw

4.3 $f(x) = sin2x$. Die inverse van $y = f(x)$ is nie 'n funksie nie.

a) Hoe kan die definisieversameling van f beperk word sodat die inverse wel 'n funksie sal wees? (2)

$2x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	1	Def vers bgsinx
$x \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$	1	Antw

b) Gee vervolgens die vergelyking van f^{-1} in die vorm $y = \cdots$ (3)

$x = sin2y$	1	Ruil x en y
$2y = bgsinx$	1	Bgsin
$y = \frac{1}{2} bgsinx$	1	Antw

VRAAG 5 [21 punte]

5.1 Gegee $f(x) = \begin{cases} bgtan x & as \quad x < 1 \\ x^2 & as \quad x = 1 \\ \frac{\pi}{4} & as \quad x > 1 \end{cases}$

Bepaal, met algebraïese motivering, of f kontinu is in die punt $x = 1$.
Indien nie, noem die tipe diskontinuïteit. (5)

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{4}$	1	Lim links
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{4}$	1	Lim regs
$f(1) = 1$	1	Funksiewaarde
$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$	1	Definisie
Verwyderbare diskont.	1	Antw

5.2 Gebruik grondbeginsels en bepaal $f'(x)$ as $f(x) = \sqrt{1-x}$ (6)

$f(x+h) = \sqrt{1-x-h}$	1	f(x+h)
$f(x+h) - f(x) = \sqrt{1-x-h} - \sqrt{1-x}$	1	f(x+h)-f(x)
$=(\sqrt{1-x-h} - \sqrt{1-x}) \times \frac{\sqrt{1-x-h}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x-h}+\sqrt{1-x}}$	1	x volk vierk
$= \frac{1-x-h-1+x}{\sqrt{1-x-h}+\sqrt{1-x}}$	1	Vereenv
$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{\sqrt{1-x-h}+\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{h}$	1	In formule
$= -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$	1	Antw

5.3 Maak gebruik van 'n oneindige Riemann-som en bepaal $\int_1^2 (x^2 - x)\,dx$. (10)

$\Delta x = \frac{1}{n}$	1	Δx
$x_i = 1 + \frac{i}{n}$	1	$x_i =$
$f(x_i) = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 - (1 + \frac{i}{n})$	1	Vervang in f
$= 1 + \frac{2i}{n} + \frac{i^2}{n^2} - 1 - \frac{i}{n}$	1	Maal hakie uit
$= \frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2}$	1	vereenv
$\Delta x. f(x_i) = \frac{i}{n^2} + \frac{i^2}{n^3}$	1	formule
$\sum_{i=1}^{n} \Delta x. f(x_i) = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right] + \frac{1}{n^3}[\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}]$	2	1 elke vervang
$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i). \Delta x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$	1	Limiet reg
$= \frac{5}{6}$	1	Antw

VRAAG 6 [17 punte]

Gegee: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 12$.

6.1 Die grafiek van $y = f(x)$ het twee buigpunte. Bepaal die x-waardes van die buigpunte. Toon aan dat dit wel buigpunte is. (8)

$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$	1	1e afgeleide
$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0$	2	2e afgeleide en =0
$x = \pm 1$	2	Elke antwoord
$f''(-2) = 36$	1	Toets voor -1
$f''(0) = -12$	1	Toets na -1 en voor 1
$f''(2) = 36$	1	Toets na 1

6.2 Bepaal of die punte bereken in VRAAG 6.1 ook stasionêre punte is. (3)

$f'(-1) \neq 0$	1	$f'(-1)$
$f'(1) = 0$	1	$f'(1)$
$\therefore x = 1$ ook draaipunt	1	Antw

6.3 Die grafiek van f sny die x-as op twee punte. Verduidelik waarom Newton se metode nie gebruik kan word met 'n aanvangswaarde van $x = -2$ nie. (2)

$f'(-2) = 0$, dit is stasionêre punt	2	=0, stasionêr

6.4 Gebruik $x = -3$ as aanvangswaarde en gebruik Newton se metode om een van die snypunte met die x-as te bereken. Gee jou antwoord korrek tot vier desimale syfers. Toon duidelik hoe jy Newton se metode gebruik. (4)

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 6x_n^2 + 8x_n + 12}{4x_n^3 - 12x_n + 8}$	2	Formule en afgeleide
$x \approx -2{,}7051$	2	Antw en reg afgerond

VRAAG 7 [19 punte]

7.1 Differensieer die vogende funksies:

a) $f(x) = secx \times (lnx)$ (3)

$f'(x) = secx.tanx\ lnx + secx.\frac{1}{x}$	3	1 elke afg, 1 reël

b) $g(x) = bgsin(e^{5x})$ (3)

$\frac{1}{\sqrt{1-e^{10x}}}.e^{5x}.5$	3	Bgsin, e, 5

7.2 ’n Grafiek se vergelyking is $x^2 - 3xy + 25y^2 = 91$.

(a) Bepaal $\frac{dy}{dx}$ deur van implisiete differensiasie gebruik te maak. (5)

$2x - 3y - 3x.\frac{dy}{dx} + 50y.\frac{dy}{dx} = 0$	4	Elke term
$\frac{dy}{dx} = \frac{3y-2x}{50y-3x}$	1	Ant

(b) Toon aan dat $\frac{dy}{dx} = 0$ by die punt (3;2). (1)

(3; 1): $\frac{3(2)-2(3)}{25(2)-3(3)} = 0$	1	Invervang

(c) Bepaal $\frac{d^2y}{dx^2}$ en bepaal vervolgens die aard van die draaipunt by (3; 2). (7)

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3y'-2)(50y-3x)-(3y-2x)(50y'-3)}{(50y-3x)^2}$	4	1 reël. 1 elke afg, 1 noemer
En $y' = 0,\ x = 3,\ y = 2$	1	vervang regte waardes
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2(50.2-9)-0.(-3)}{(25y-3x)^2} < 0$	1	<0, antw nie nodig
∴ Maks Draaipunt	1	Antw

VRAAG 8 [17 punte]

Gegee die rasionale funksie $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$

8.1 Gee 'n rede waarom die grafiek van f geen vertikale asimptote het nie. (1)

$e^x \neq 0$	1	rede

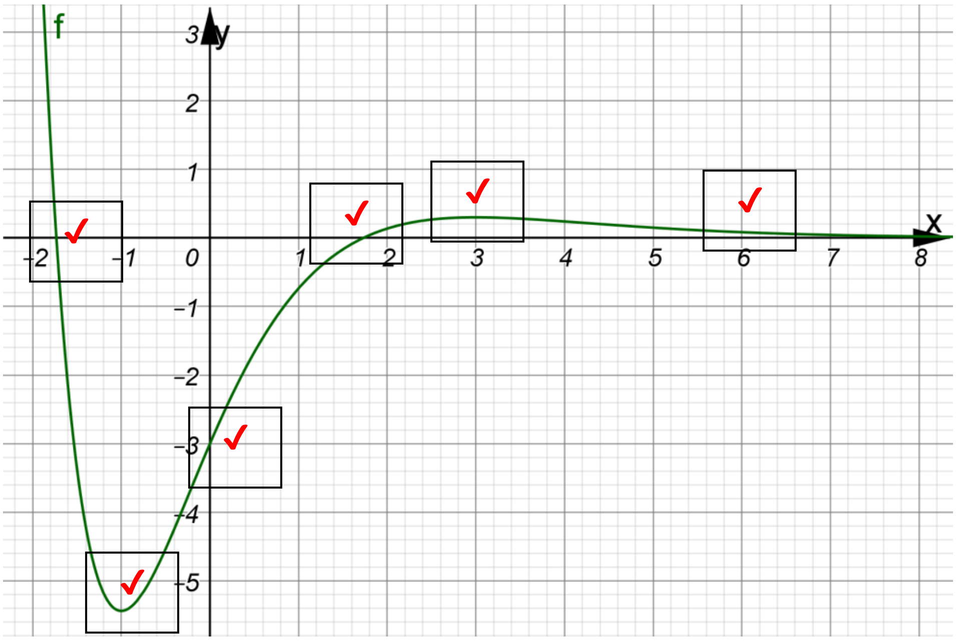
8.2 Die grafiek van f het 'n maksimum draaipunt by $(a; 0{,}3)$ en 'n minimum draaipunt by $(b; -5{,}4)$ met $a > 0$ en $b < 0$. Gebruik $f'(x) = 0$ en bepaal die waardes van a en b. (7)

$f'(x) = \frac{2x.e^x - (x^2-3)e^x}{e^{2x}} = 0$	2	Elke afg
$2xe^x - x^2e^x + 3e^x$	1	Vereenv hakies
$e^x(x^2 - 2x - 3) = 0$	1	Faktoriseer
$e^x(x-3)(x+1)$	1	Faktoriseer
$x = 3$ of $x = -1$	1	ant
$a = 3$ en $b = -1$	1	Regte a en b

8.3 Bepaal die x- en y- afsnitte van die grafiek van f. (3)

$y = -3$	1	y-afsnit
$x^2 - 3 = 0$	1	vgl
$x = \pm\sqrt{3}, \pm 1{,}73$	1	ant

8.4 Gebruik die inligting vooraf verkry en maak 'n sketsgrafiek van $y = f(x)$ op die onderstaande assestelsel, as dit verder ook gegee word dat die grafiek 'n horisontale asimptoot by $y = 0$ het. (6)



VRAAG 9 [25 punte]

9.1 Bepaal die volgende integrale:

a) $\int \cot^2 x \, dx$ (4)

$\int (cosec^2 x - 1)dx$	1	identiteit
$= -cotx - x + k$	3	Elke term

b) $\int_2^5 \frac{(8x-1)}{(2x-1)(x+1)} dx.$

Gebruik parsiële breuke en gee die antwoord in die vorm $\boldsymbol{lnA}$ met $A \in \mathbb{Z}$ (10)

$\frac{(8x-1)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1}$	1	vorm
$8x - 1 = A(x+1) + B(2x-1)$	1	X kgv
$x = -1: B = 3$	1	B
$x = \frac{1}{2}: A = 2$	1	A
Int = $\frac{2\,ln(2x-1)}{2} + 3ln(x+1) \Big\vert_2^5$	2	Elke integraal
$= ln9 + 3ln6 - ln3 - 3ln3$	2	Vervang 5 en 2
$= ln\frac{9.6^3}{3.3^3}$	1	Log wette
$= ln24$	1	Antw

9.2 a) Gebruik faktor-integrasie en toon aan dat $\int lnx\,dx = xlnx - x + k$. (5)

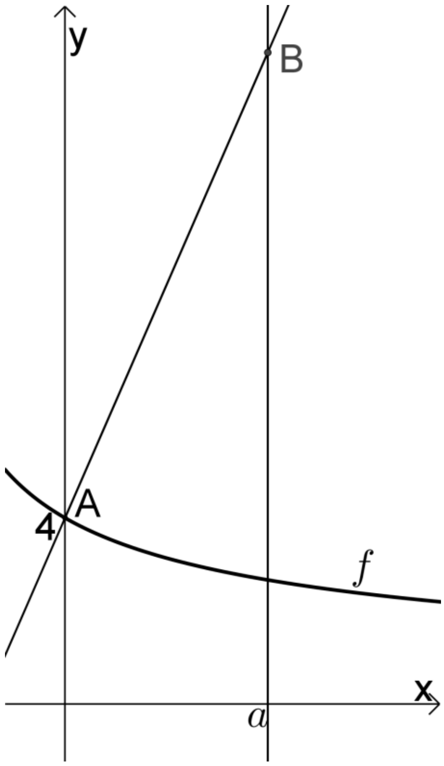
Stel $f(x) = lnx$ en $g'(x) = 1$	2	Elkeen 1 punt
Dus $f'(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = x$	2	Elkeen 1 punt
$\int (1.lnx)dx = xlnx - \int \left(\frac{1}{x}.x\right) dx$	1	2e integraal

b) Bepaal vervolgens $\int \frac{ln(lnx)}{x} dx$ (6)

Stel $lnx = u$	1	Wat is u
$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$	1	Diff
$\frac{1}{x}dx = du$	1	du alleen
$\int (lnu)du = ulnu - u$	1	Vervang
$= ulnu - u$	1	Antw met u
= $lnx.\ln(lnx) - lnx + k$	1	Vervan na x
Net antwoord: vol punte		

VRAAG 10 [17 punte]

Die skets toon 'n gedeelte van die grafiek van $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+4}}$. Die grafiek sny die y-as by A(0; 4). Die normaal (dit is die lyn loodreg op die raaklyn) van die grafiek by punt A, sny die lyn $x = a$ by B.



10.1 Bepaal die vergelyking van AB. (7)

$f(x) = 8(x+4)^{-\frac{1}{2}}$	1	eksponent
$f'(x) = -4(x+4)^{-\frac{3}{2}}$	2	-4 en eksp
By $x = 0$: $m = -\frac{1}{2}$	2	x = 0 en m
Dus $m_{AB} = 2$	1	M loodreg
AB: $y = 2x + 4$	1	vgl

10.2 Bepaal die waarde van a indien die oppervlakte ingesluit deur die grafiek van f, die x-as en die y-as gelyk aan 16 is. (6)

$\int_0^a 8(x+4)^{-\frac{1}{2}}\, dx = 16$	2	Area = integral en = 16
$8(x+4)^{\frac{1}{2}}.2\Big\vert_0^a = 16$	2	Eksp en die 2
$(a+4)^{\frac{1}{2}} - 2 = 1$	1	vervang
$a = 5$	1	Antw
Ant $a = -3$	4 punte	

10.3 Die area ingesluit deur die normaal AB, die grafiek van f en die lyn $x = a$, roteer om die x-as. Skryf 'n vergelyking neer waarmee die volume van hierdie omwentelingsliggaam bereken kan word. (Moet dit nie bereken nie). (4)

$V = \pi \int_0^a (2x+4)^2\, dx - \pi \int_0^a \frac{64}{x+4}\, dx$	4	1 formule 1 reg lyn, volg op 1 f 1 kwadrate appart